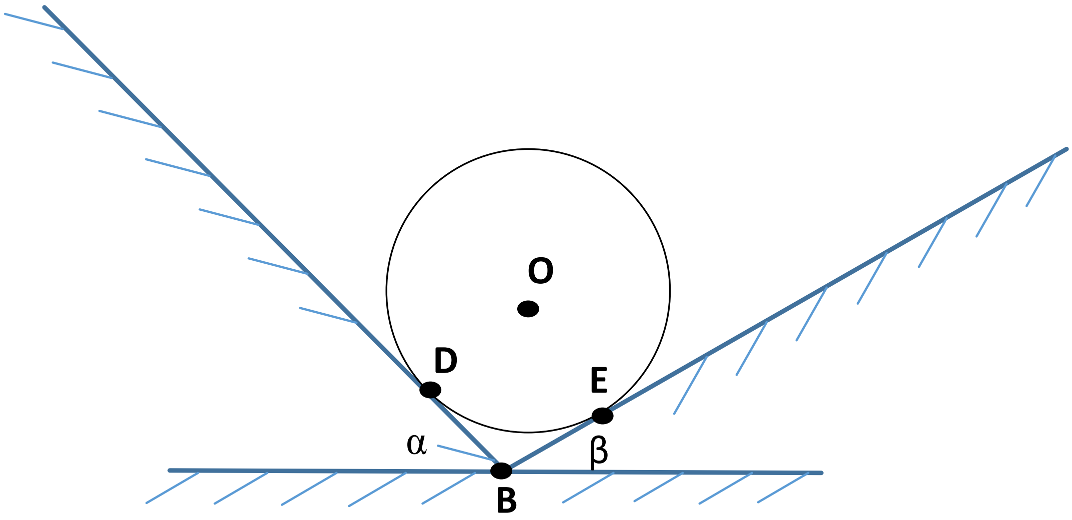
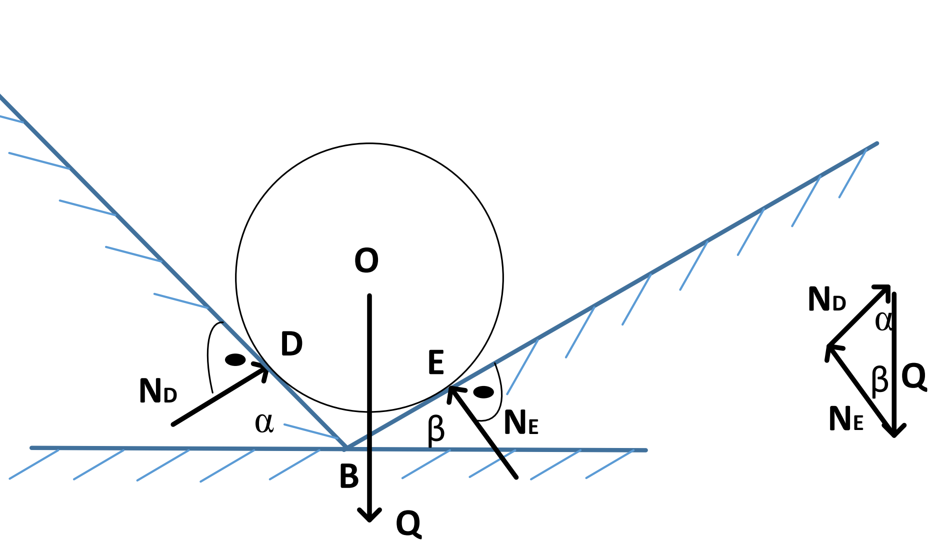
MEHANIKA 2020.

1. Homogena kugla O težine Q oslanja se tačkama D i E o dve glatke strme ravni AB i BC. Ravni su pod uglovima α i β nagnuti prema horizontali. Odrediti reakcije veza.



Rešenje: Primena teoreme o ravnoteži tri sile i sinusne teoreme.

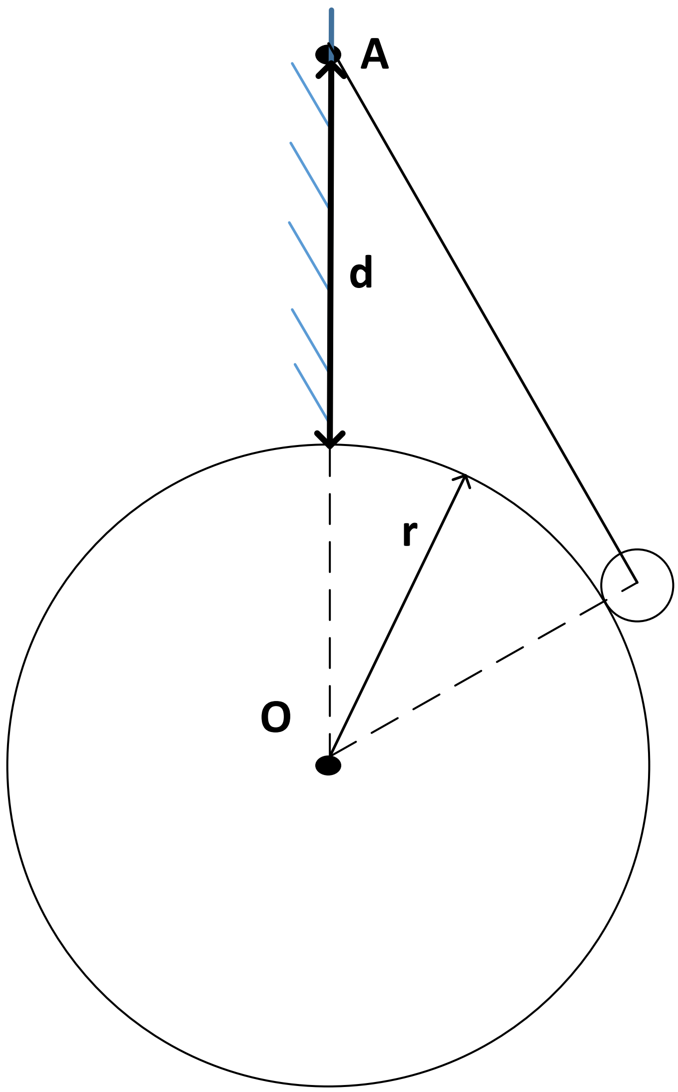


$$\frac{N_E}{sin\alpha} = \frac{N_D}{sin\beta} = \frac{Q}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{Q}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$N_E = \frac{sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} Q$$

$$N_D = \frac{sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} Q$$

2. Kuglica B težine Q vezana je užetom AB za nepomičnu tačku A i oslanja se na nepomičnu kuglu poluprečnika r. Tačka A se nalazi na vertikali koja prolazi kroz centar kugle. Poznata je dužina užeta sa slike l i odstojanje d sa slike. Odrediti silu u žetu i rekaciju veze sa kuglom.

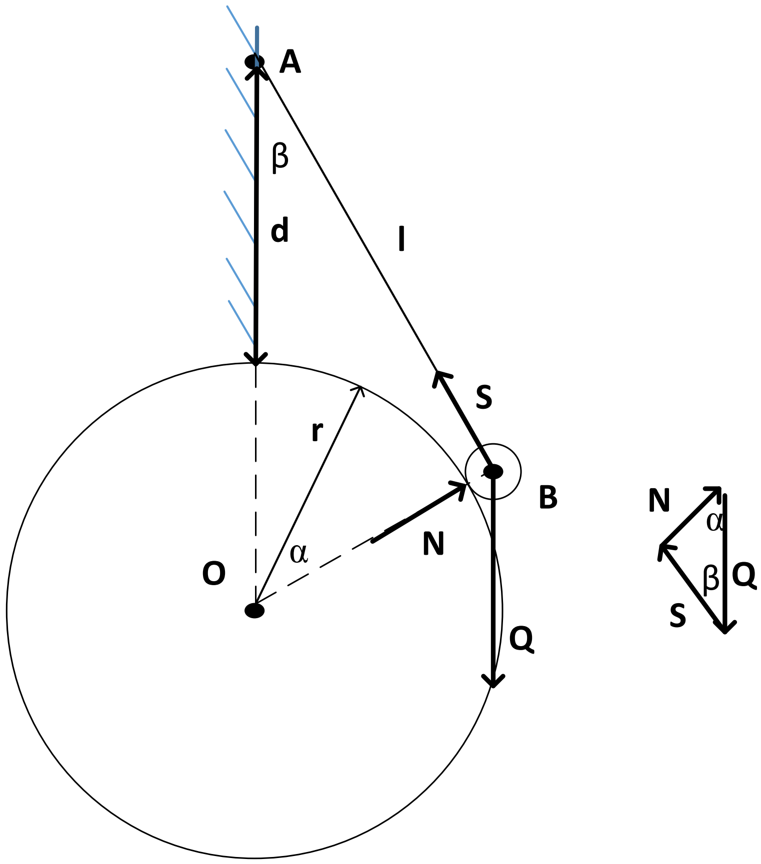


Rešenje: Primena teoreme o ravnoteži tri sile, sličnosti trouglova i sinusne teoreme. Slični trouglovi su OAB i trougao koji čine vektori tri sile.

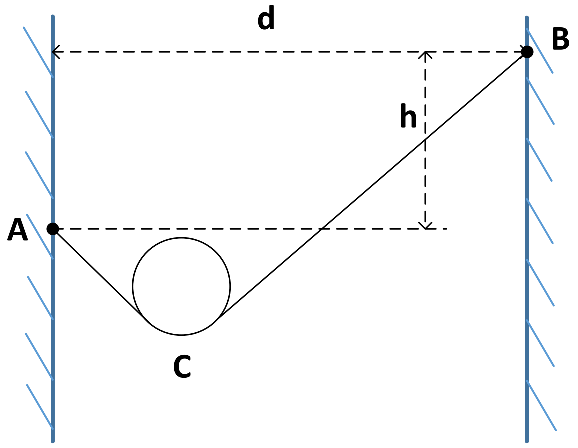
$$\frac{N}{r} = \frac{S}{l} = \frac{Q}{d + r}$$

$$N = \frac{r}{d + r} Q$$

$$S = \frac{l}{d + r} Q$$


A
β
d
l
S
r
B
N
α
O
N
Q
N
α
β
Q
S
Q

3. Gladak kotur, težine $Q = 180\ N$, može da klizi po gipkom užetu ACB dužine $L = 5\ m$, čiji su krajevi A i B učvršćeni za glatke vertikalne zidove tako da je uzvišenje jedne tačke u odnosu na drugu $3\ m$. Odstojanje zidova je $d = 4\ m$. Odrediti silu u užetu zanemarujući njegovu težinu.



Rešenje: Pošto je kotur gladak, onda on klizi i nema trenja pa je S1 = S2 i α1 = α2 = α.

$$\frac{\boldsymbol{Q}}{\sin(\boldsymbol{\pi}-2\boldsymbol{\alpha})}=\frac{\boldsymbol{S}}{\sin(\boldsymbol{\alpha})}=\frac{\boldsymbol{Q}}{\sin(2\boldsymbol{\alpha})}=\frac{\boldsymbol{Q}}{2\sin(\boldsymbol{\alpha})\cos(\boldsymbol{\alpha})}$$

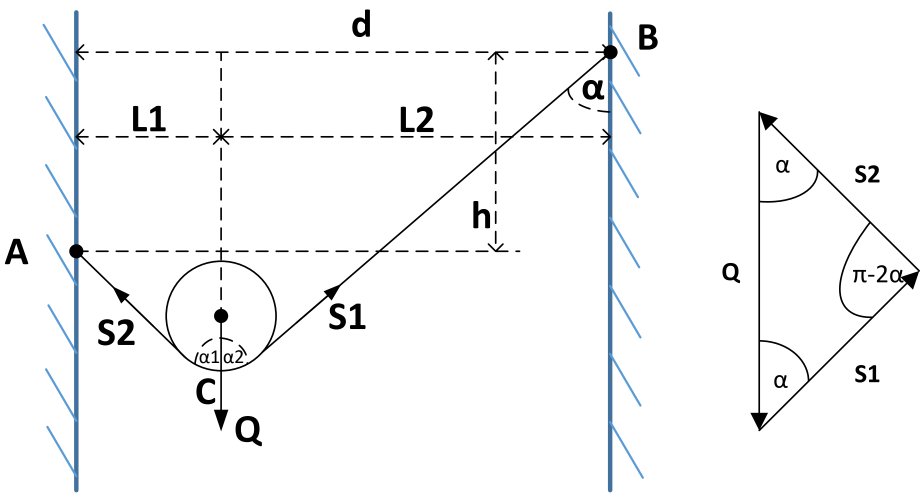
$$\Rightarrow \boldsymbol{S}=\frac{\boldsymbol{Q}}{2\cos(\boldsymbol{\alpha})}$$

$$\boldsymbol{L_1}=\overline{\boldsymbol{AC}}\sin\boldsymbol{\alpha}\qquad \boldsymbol{L_2}=\overline{\boldsymbol{BC}}\sin\boldsymbol{\alpha}$$

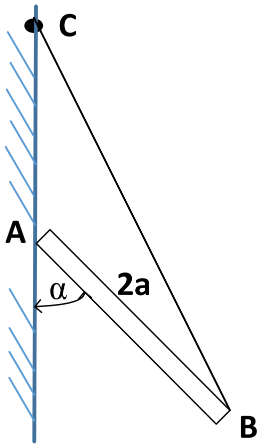
$$\boldsymbol{L_1}+\boldsymbol{L_2}=\boldsymbol{d}=(\overline{\boldsymbol{AC}}+\overline{\boldsymbol{BC}})\sin\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{L}\sin\boldsymbol{\alpha}\ \Rightarrow\ \sin\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{L}}$$

$$\Rightarrow\ \cos\boldsymbol{\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{L}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S}=\frac{\boldsymbol{Q}}{2\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{L}}\right)^2}}$$



4. Homogeni prizmatični štap AB dužine 2a i težine G oslanja se krajem A na vertikalni glatki zid. Drugi njegov kraj B pridržava uže koje je vezano za tačku C. Ako su poznate veličine a, G i ugao α između štapa i zida odrediti reakcije veza i položaj tačke C za koju treba vezati uže u položaj ravnoteže.



Rešenje: Primena teoreme o ravnoteži tri sile, sličnosti trouglova i. Slični trouglovi su CKB i trougao oab koji čine vektori tri sile.

$$tg\beta = \frac{N}{G}$$

$$DB = asin\alpha$$

$$DE = 2acos\alpha$$

$$tg\beta = \frac{DB}{DE} = \frac{asin\alpha}{2acos\alpha} = \frac{1}{2}tg\alpha$$

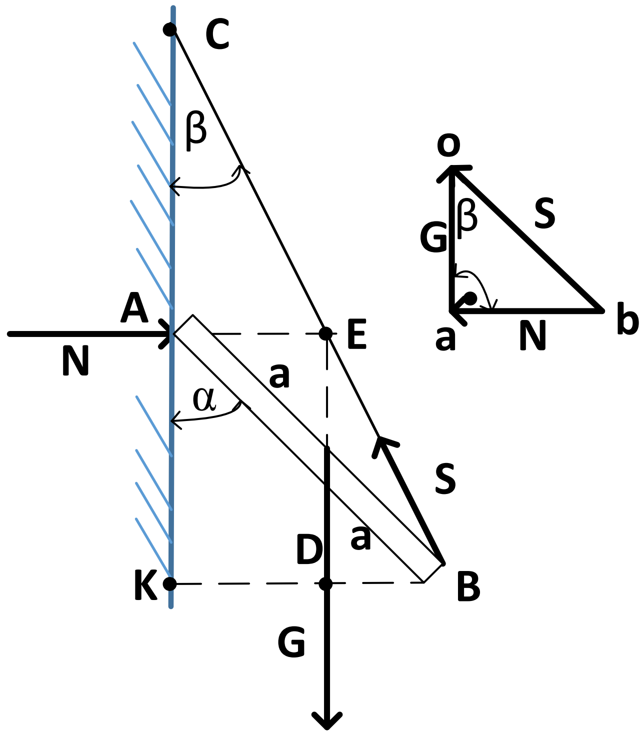
$$N = G\frac{1}{2}tg\alpha$$

$$S = G\sqrt{1 + \frac{1}{4}tg\alpha^2}$$

$$tg\beta = \frac{KB}{CK}$$

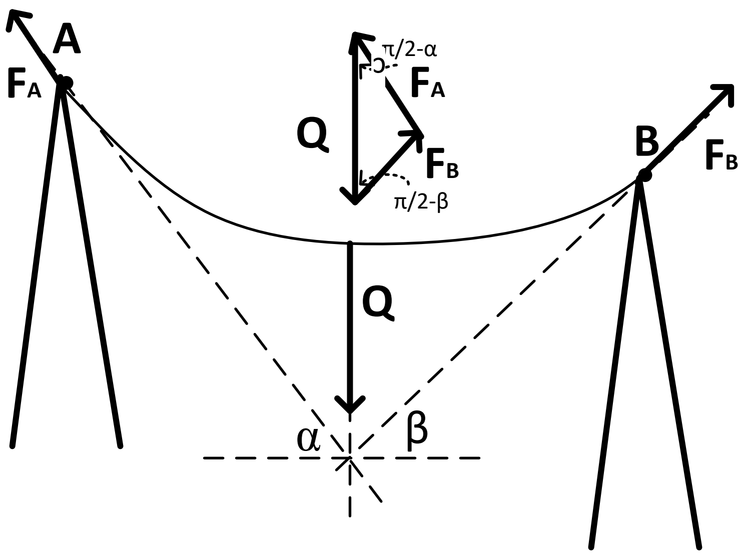
$$KB = 2asin\alpha$$

$$CK = AC + ED = AC + 2acos\alpha = \frac{2asin\alpha}{\frac{1}{2}tg\alpha} = 4acos\alpha$$



C
β
o
S
G
β
A
E
a
N
b
N
α
a
S
D
a
K
B
G

5. Obična lančanica p=40N/m spaja dve tačke A i B na rastojanju od 120m. Uglovi između nategnute lančanice i horizontale su α=20˚ i β=10˚.



Rešenje: Primena teoreme o ravnoteži tri sile i sinusne teoreme.

$$\frac{S_A}{sin(\frac{\pi}{2}-\beta)}=\frac{S_B}{sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\frac{Q}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$S_A=\frac{cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}Q$$

$$S_B=\frac{cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

<u>Prvila, uputstva kod rešavanja zadataka iz statike:</u>

1) Uočiti kruto telo,

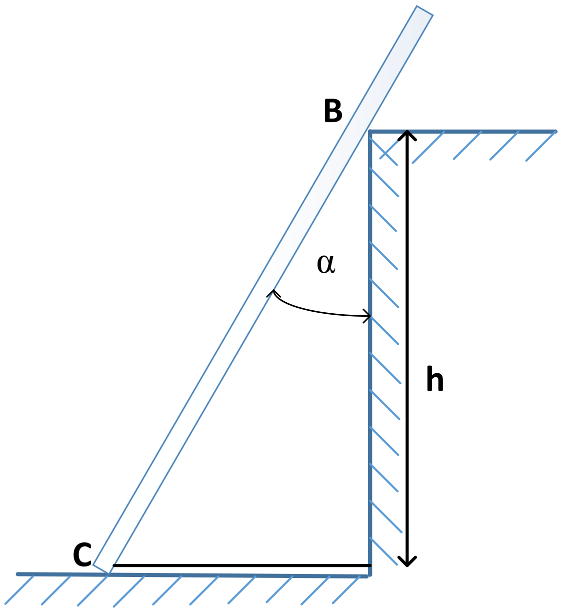
2) Osloboditi se veza i označiti sve sile na slici,

3) Postaviti koordinatni sistem po slobodnoj volji. Preporuka je da sentar koordinatnog sistema bude u tački gde se seče najveći broj sila, jer se na taj način izbegava pojavljivanje tih sila u momentnim jednačinama. Sile koje seku neku od osa ili su joj paparelne nemaju, ne stvaraju tu komponentu momenta.

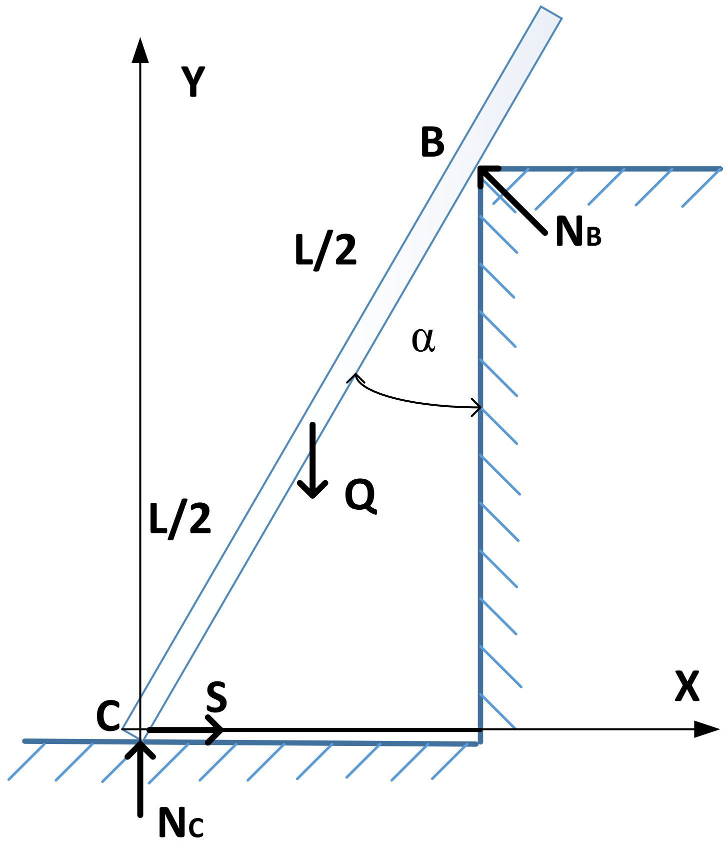
4) Postaviti SUR, Statičke Uslove Ravnoteže, maksimalno 6 jednačina.

5) Numerički rešiti jednačine i odrediti nepoznate u zadatku.

6. Homogena greda težine Q=60N i dužine L=4m oslanja se donjim krajem o glatki zid (tačka C), a gornjim krajem u tačku B o zid visine h=3m. Pri tom oslanjanju greda zaklapa ugao α=π/6 sa vertikalom. U tom položaju gredu održava uže prikačeno u tački C koje je zakačeno neposredno iznad poda. Odrediti silu zatezanja u užetu i reakcije podloga.



Rešenje:



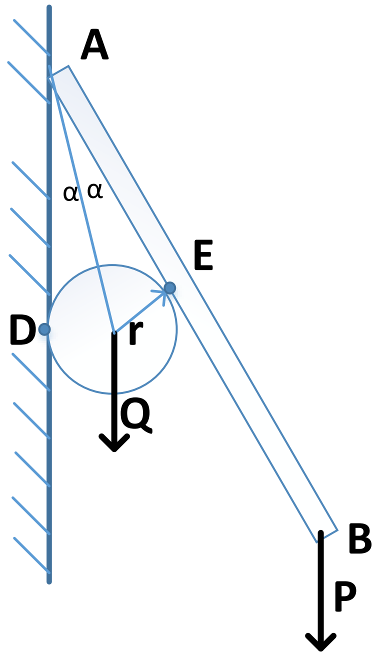
Posmatra se štap:

$$S - N_B \cdot cos\alpha = 0$$
$$-Q + N_C + N_B \cdot sin\alpha = 0$$

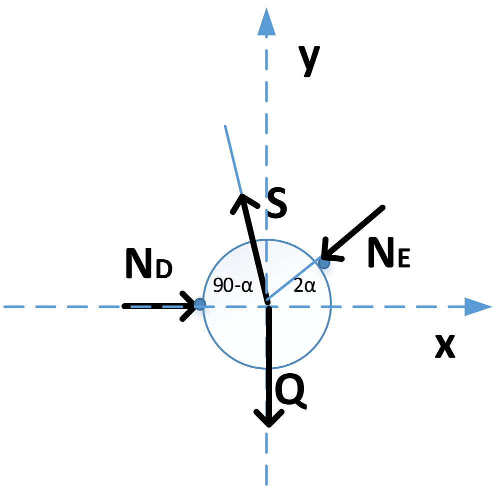
$$-Q \cdot l/2sin\alpha + N_B \cdot CB = 0$$
$$Q \cdot \frac{l}{2}sin\alpha = N_B \cdot h/cos\alpha$$
$$N_B = Q \cdot \frac{l}{2h}sin\alpha cos\alpha = 10\sqrt{3}\text{=17,3N}$$

$$N_C = Q - N_B \cdot sin\alpha = 51{,}35N$$
$$S = N_B \cdot cos\alpha = 15N$$

7. Homogena kružni disk poluprečnika r i težine Q vezan je užetom za tačku A, a u tački D se solanja na glatki vertikalni zid. Kruti štap AB, za čiji kraj B je okačen teret težine P zglobno je vezan za zid (cilindrični zglob u tački A) i oslanja se na disk kao na slici. Poznate veličine su r, Q, P, AB=L i α. Težinu užeta i štapa zanemariti. Izračunati silu u užetu, pritisak diska na zid i diska na štap.



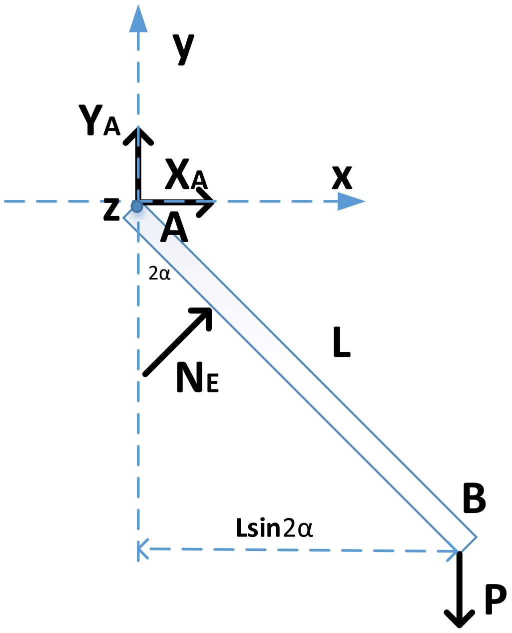
Rešenje: Prvo se posmatra samo disk kao kruto telo:



$$\sum X = N_D - N_E \cdot cos2\alpha - Scos(90-\alpha) = N_D - N_E \cdot (cos^2\alpha - sin^2\alpha) - Ssin\alpha = 0$$

$$\sum Y = -Q - N_E \cdot sin2\alpha + Ssin(90-\alpha) = -Q - N_E \cdot 2sin\alpha cos\alpha + Scos\alpha = 0$$

Momentne jednačine ne postoje jer se sve sile seku u koordinatnom početku, koji je izabran da bude centar diska. Zatim se posmatra samo štap kao kruto telo u cilju dobijanja treće jednačine. Centar koordinatnog sistema štapa je postavljen u cilindričnom sglobu A jer se tu seku dve sile reakcije zgloba:



$$\sum M_{AZ} = -P \cdot sin2\alpha \cdot L + N_E \cdot AE = 0$$

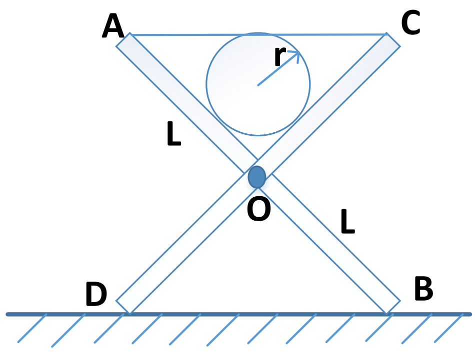
$$tg\alpha = \frac{r}{AE}, AE = \frac{r}{tg\alpha}$$

$$P \cdot 2sin\alpha cos\alpha \cdot L = N_E \cdot \frac{rcos\alpha}{sin\alpha}, N_E = P \cdot 2sin^2\alpha \frac{L}{r}$$

$$S = \frac{Q}{cos\alpha} + P \cdot 2sin^3\alpha \frac{L}{r},$$

$$N_D = Qtg\alpha + P \cdot 2sin^2\alpha \frac{L}{r},$$

8. Dva jednaka homogena, glatka štapa AB i CD oslanjaju se u tačkama B i D na glatku horizontalnu podlogu. Dužine štapova su iste i iznose 2*L*, a težine *G*. Središta štapova su međusobno pričvršćena cilindričnim zglobom O. Krajevi štapova A i C su spojeni užetom dužine *L*, kao na slici. Između gornjih polovina štapova leži tanak disk poluprečnika *r* i težine G_1. Odrediti silu u užetu.

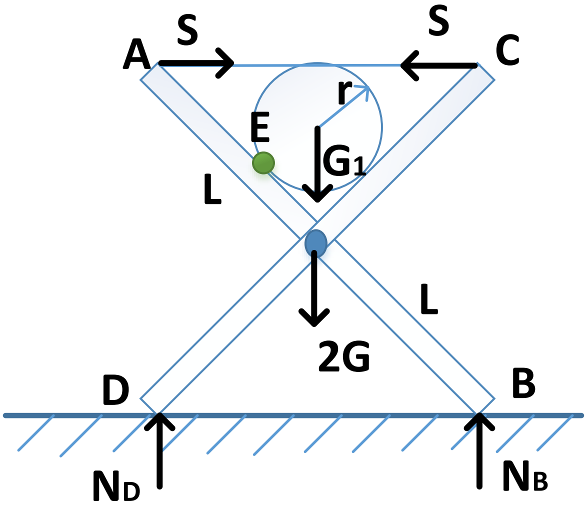


Rešenje:

Posmatra se ceo sistem kao telo:

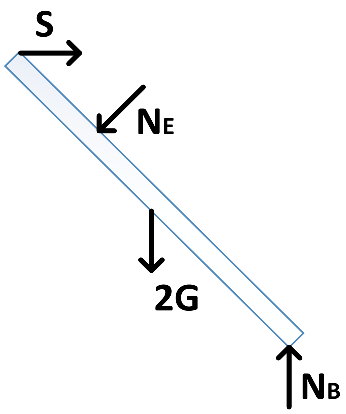
$$N_D + N_B = 2G + G_1$$

Zbog simetrije: $$N_D = N_B = \frac{2G+G_1}{2}$$



Posmatra se samo štap:

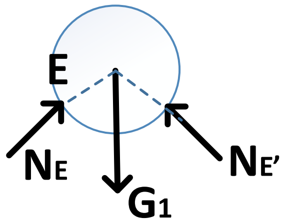
$$M_{oz} = N_B \cdot \frac{L}{2} - S\frac{L\sqrt{3}}{2} + N_E\overline{OE} = 0$$
$$\overline{OE} = r\sqrt{3}$$



Posmatra se samo disk:

$$G_1 = 2 \cdot cos60 \cdot N_E$$

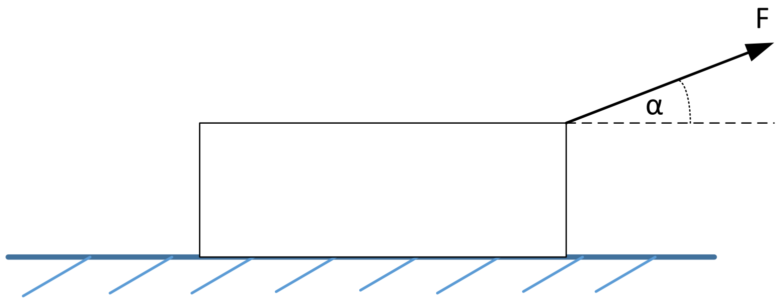
$$N_E = G_1$$



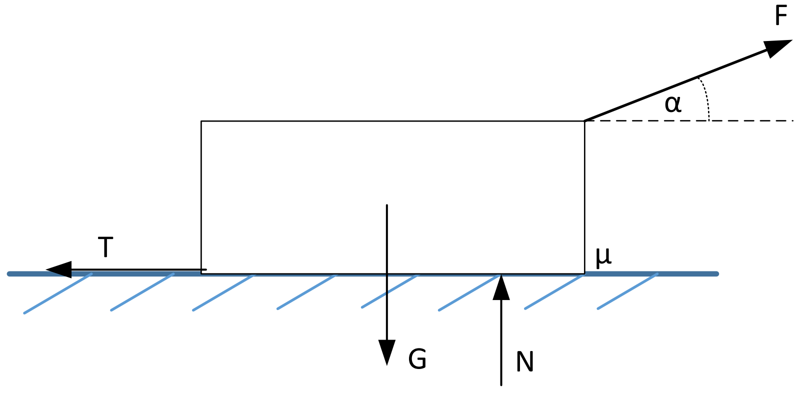
$$\frac{2G + G_1}{2} \cdot \frac{L}{2} - S\frac{L\sqrt{3}}{2} + G_1 r\sqrt{3} = 0$$

$$S = \frac{G_1 r\sqrt{3} + \frac{(2G + G_1)L}{4}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}}$$

9. Sanduk težine G koji leži na hrapavoj horizontalnoj ravni treba pokrenuti silom F čija napadna linija zaklapa sa horizontalom ugao α. Odrediti ugao α tako da je intenzitet sile F najmanji, kao i vrednost tog intenziteta.



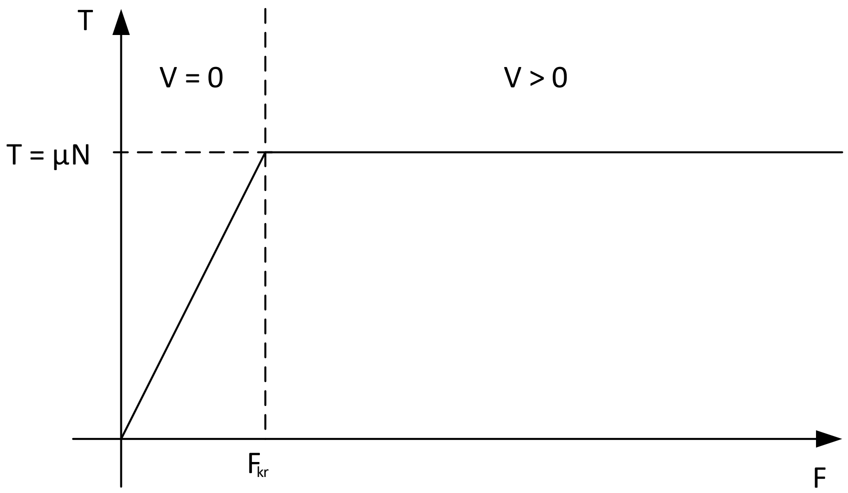
Rešenje:



Sila trenja T se suprotstavlja kretanju:

$$\boldsymbol{T < \mu N \Rightarrow v = 0}$$

$$\boldsymbol{T = \mu N \Rightarrow v > 0}$$



U režimu mirovanja tela ($v = 0$) intenzitet sile F nije premašao kritičnu vrednost i važi:

$$\boldsymbol{\Sigma x = 0 \Rightarrow F\cos\alpha - T = 0}$$

$$\boldsymbol{\Sigma y = 0 \Rightarrow F\sin\alpha + N - G = 0}$$

Treća, momentna jednačina, ΣM_{oz}, ne može se napisati jer napadna tačka sile N nije poznata, pa se ova jednačina ne piše. Iz prethodne dve jednačine sledi:

$$\boldsymbol{T = F\cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{N = -F\sin\alpha + G}$$

Kada intenzitet sile F premaši kritičnu vrednost F_{kr} telo počinje da se kreće ($v > 0$) i vrednost sile trenja (otpora kretanju) postaje konstantna, $T = \mu N$.

U graničnom trenutku kada je $F = F_{kr}$ važe prethodne dve jednačine, plus jednačina $T = \mu N$, pa se kombinacijom ove tri jednačine dobija:

$$\boldsymbol{T = \mu N = \mu(-F\sin\alpha + G) = F\cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow F = \frac{\mu G}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}}$$

Diferenciranjem F po uglu α i izjednačavanjem tog izraza sa nulom, dobija se vrednost ugla α za koju se ima minimalni intenzitet sile F.

$$\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial\alpha} = 0 = \frac{-\mu G(\mu\cos\alpha^* - \sin\alpha^*)}{(\mu\sin\alpha^* + \cos\alpha^*)^2} \Rightarrow \mu\cos\alpha^* - \sin\alpha^* = 0 \Rightarrow \mu = \tan\alpha^*}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \alpha^* = \tan^{-1}\mu}$$

Minimalni intenzitet sile F se dobija kada se uvrsti dobijeni ugao α^* u izraz za F.

$$\boldsymbol{F_{min} = \frac{\mu G}{\cos\alpha^* + \mu\sin\alpha^*} = \frac{\mu G}{\cos\alpha^*(1 + \mu\tan\alpha^*)} = \frac{\mu G}{\cos\alpha^*(1 + \mu\tan\alpha^*)}}$$

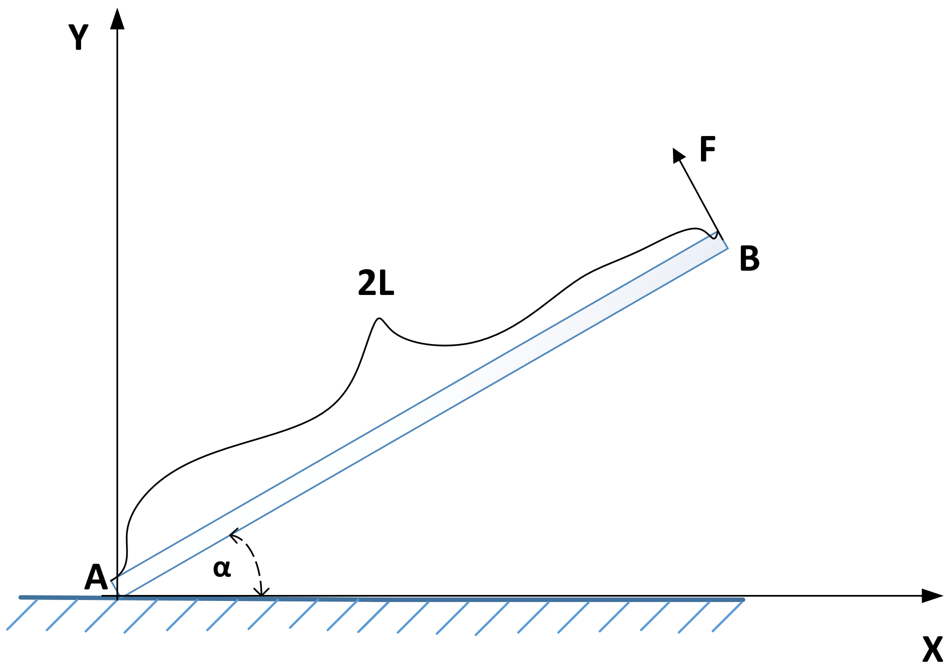
Kako je

$$\cos\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan\alpha^*)^2}} \quad \| \quad \mu = \tan\alpha^*$$

Tako se dobija intenzitet sile F:

$$F_{min} = \frac{\mu G}{\cos\alpha^*\,(1+\mu\tan\alpha^*)} = \frac{\mu G\sqrt{1+(\tan\alpha^*)^2}}{(1+\mu\tan\alpha^*)} = \frac{\mu G\sqrt{1+\mu^2}}{(1+\mu^2)} = \frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

10. Homogeni štap dužine $AB = 2L$ i težine G drži u ravnoteži sila F koja ima osobinu da je stalno normalna na pravac AB. Ravnoteža postoji za $0^\circ < \alpha < 15^\circ$. U trenutku kada je $\alpha = \alpha_1 = 15^\circ$ štap počinje da klizi. Odrediti:
a) koeficijent klizanja
b) za koje μ štap neće klizati.



Rešenje:

a)

$$\Sigma x = 0 \Longrightarrow T - F\cos(90^\circ - \alpha) = 0 \Longrightarrow T = F\sin\alpha$$

$$\Sigma y = 0 \Longrightarrow -G + N + F\sin(90^\circ - \alpha) = 0 \Longrightarrow G = N + F\cos\alpha$$

$$\Sigma Moz = 0 \Longrightarrow -G\cdot L\cos\alpha + 2L\cdot F = 0 \Longrightarrow 2F = G\cos\alpha$$

$$F = \frac{G}{2}\cos\alpha$$

$$T = \frac{G}{2}\cos\alpha\sin\alpha$$

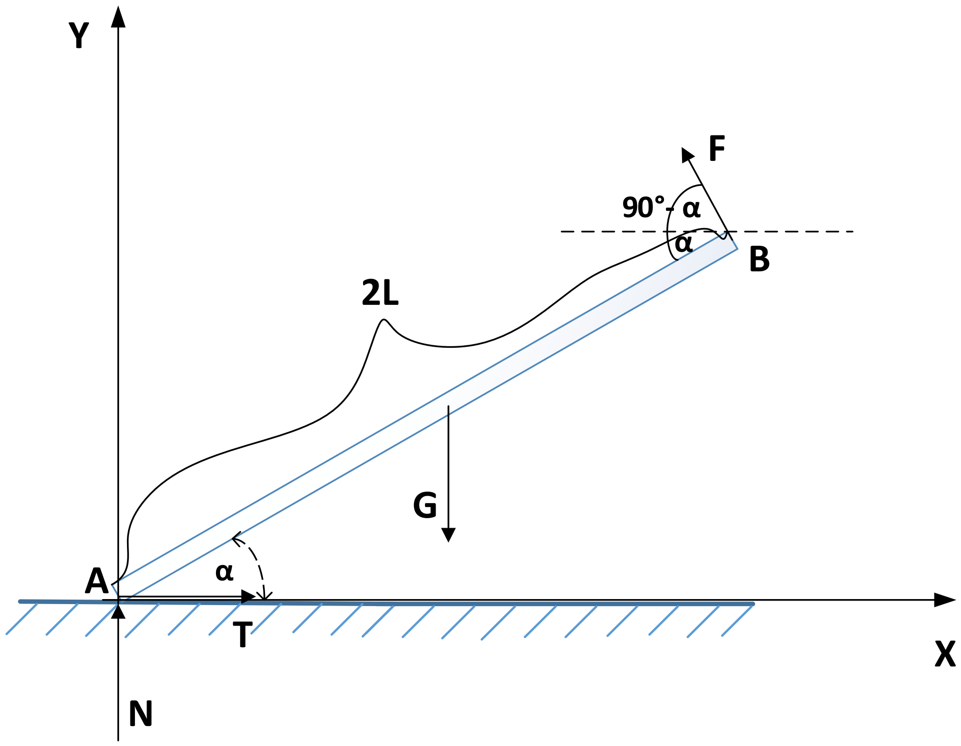
$$N = G\left(1 - \frac{(\cos\alpha)^2}{2}\right) = G \cdot \frac{3 - \cos 2\alpha}{4} \quad \| \quad (\cos\alpha)^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$0^\circ < \alpha < 15^\circ \Rightarrow T < \mu N \,;\, v = 0$$

$$\alpha = \alpha_1 = 15^\circ \Rightarrow T = \mu N = \mu G \cdot \frac{3 - \cos 2\alpha_1}{4} = \frac{G}{2}\cos\alpha_1 \sin\alpha_1$$

$$\mu(3 - \cos 2\alpha_1) = 2\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 = \sin 2\alpha_1$$

$$\mu = \frac{\sin 2\alpha_1}{3 - \cos 2\alpha_1} = \frac{\sin 30^\circ}{3 - \cos 30^\circ} = 0{,}234$$



b)

U prethodnoj tački je izračunat koeficijent μ čija vrednost izaziva proklizavanje štapa pri uglu $\alpha = 15^\circ$. U ovoj tački potrebno je pronaći koeficijent μ tako da štap ne klizi za svaki ugao α iz opsega $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Pri nekom uglu α^* javiće se najveća težnja štapa da prokliza. Iz tog kritičnog ugla α^* odrediće se koeficijent μ. Tako je obezbeđeno da pri svim drugim uglovima α štap ne klizi.

Kada je $\alpha = \alpha^*$ (sve je isto kao u prethodnoj tački, samo je ugao α^* umesto α_1):

$$\mu_{max} = \frac{\sin 2\alpha^*}{3 - \cos 2\alpha^*}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha\,(3 - \cos 2\alpha) - \sin 2\alpha\,(2\sin 2\alpha)}{(3 - \cos 2\alpha)^2} = 0$$

$$6\cos 2\alpha - 2(\cos 2\alpha)^2 - 2(\sin 2\alpha)^2 = 0$$

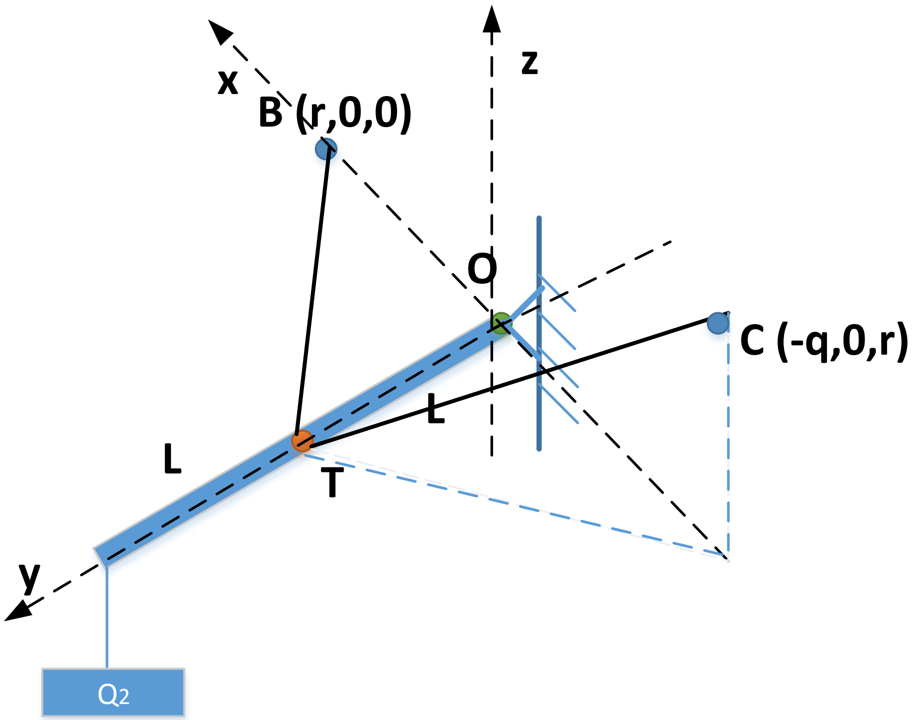
$$6\cos 2\alpha - 2 = 0$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\alpha^* = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3} = 35{,}26^\circ$$

$$\mu_{max} = 0{,}354$$

11. Homogeni štap dužine $OA = 2L$ i težine Q_1 održava se u horizontalnom položaju pomoću dva užeta i sfernog zgloba O kao na slici. U tački A okačen je teg težine Q_2. Odrediti sile u užadima i reakciju sfernog zgloba.



Rešenje:

Sa slike se mogu uočiti uglovi za koje važi:

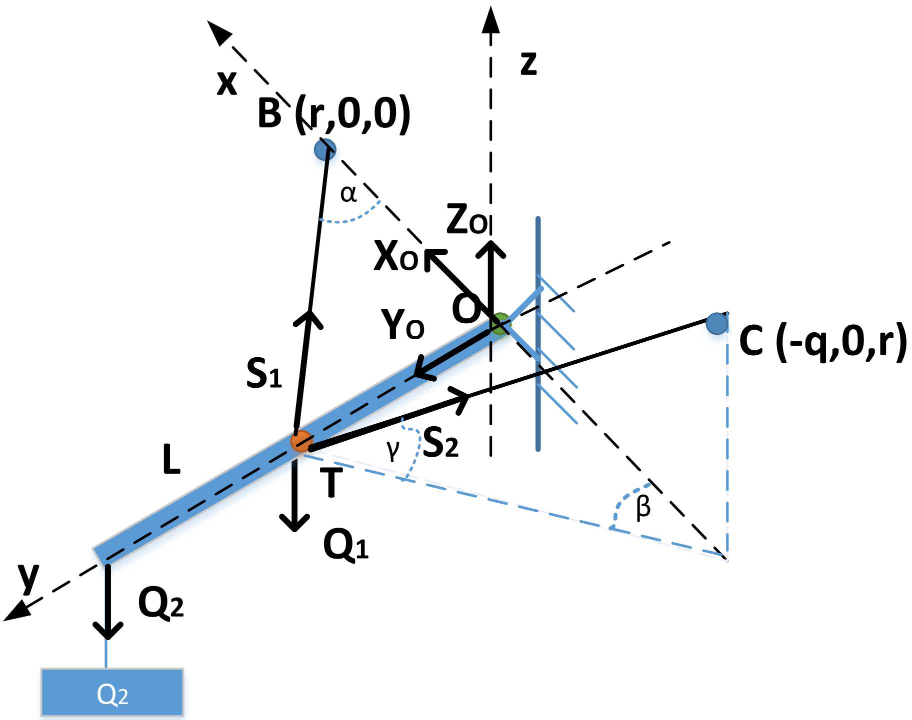
$$tg\gamma = \frac{r}{\sqrt{L^2 + q^2}}, tg\beta = \frac{L}{q}, tg\alpha = \frac{L}{r}$$

$$\Sigma x = 0 \Rightarrow S_1 cos\alpha - S_2 cos\beta cos\gamma + X_0 = 0$$

$$\Sigma y = 0 \Rightarrow -S_1 sin\alpha - S_2 sin\beta cos\gamma + Y_0 = 0$$

$$\Sigma z = 0 \Rightarrow -Q_1 - Q_2 + S_2 sin\gamma + Z_0 = 0$$

Pogodno je posmatrati momentne jednačine u odnosu na tačku T koja je na sredini štapa, jer se na taj način sile S_1 , Q_1 i S_2 gube iz momentnih jednačina.



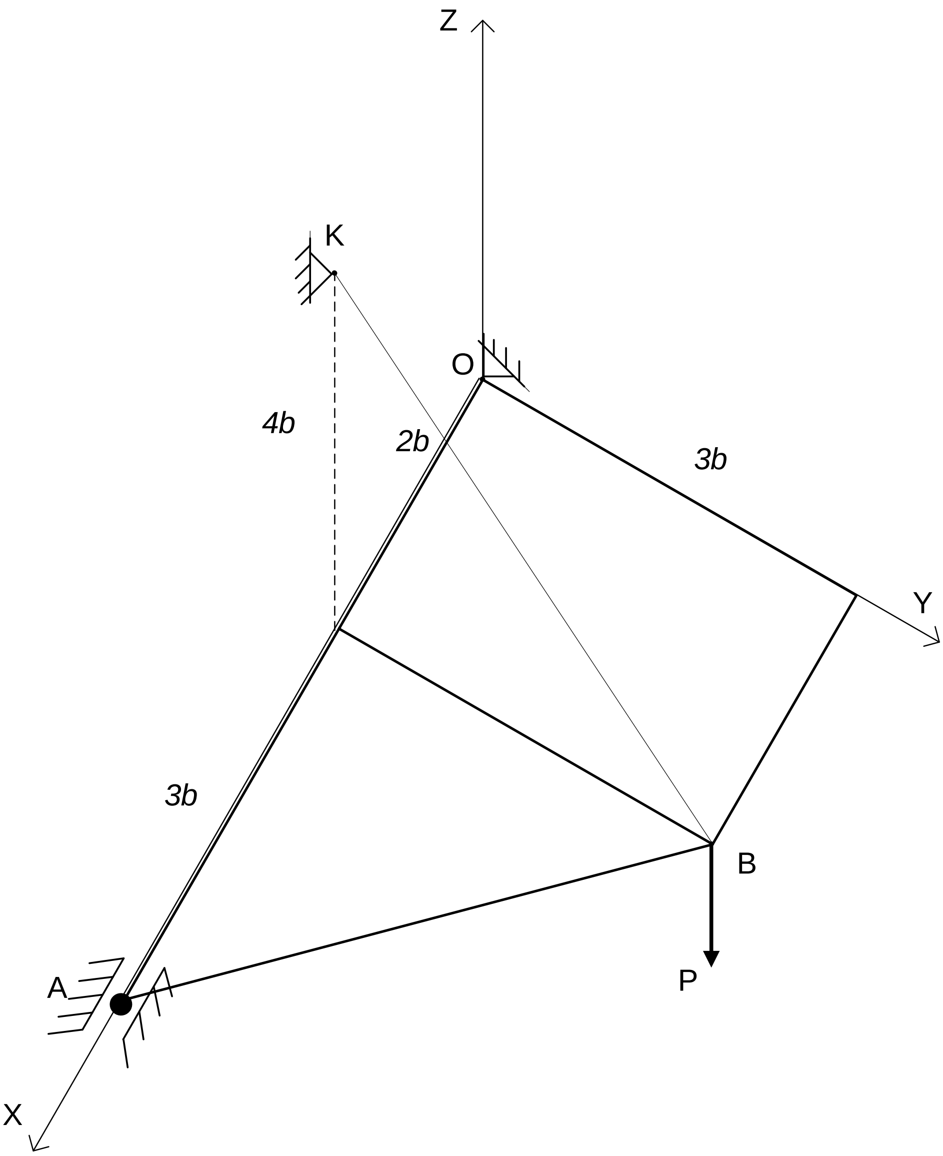
$$\Sigma M_{TX} = 0 \Rightarrow -Q_2 \cdot L - L \cdot Z_0 = 0 \ \Rightarrow Z_0 = -Q_2$$

$$\Sigma M_{TZ} = 0 \Rightarrow L \cdot X_0 = 0 \ \Rightarrow X_0 = 0$$

$$S_2 = \frac{Q_1 + 2Q_2}{sin\gamma}$$

$$S_1 = S_2 \frac{cos\gamma + cos\beta}{cos\alpha}$$

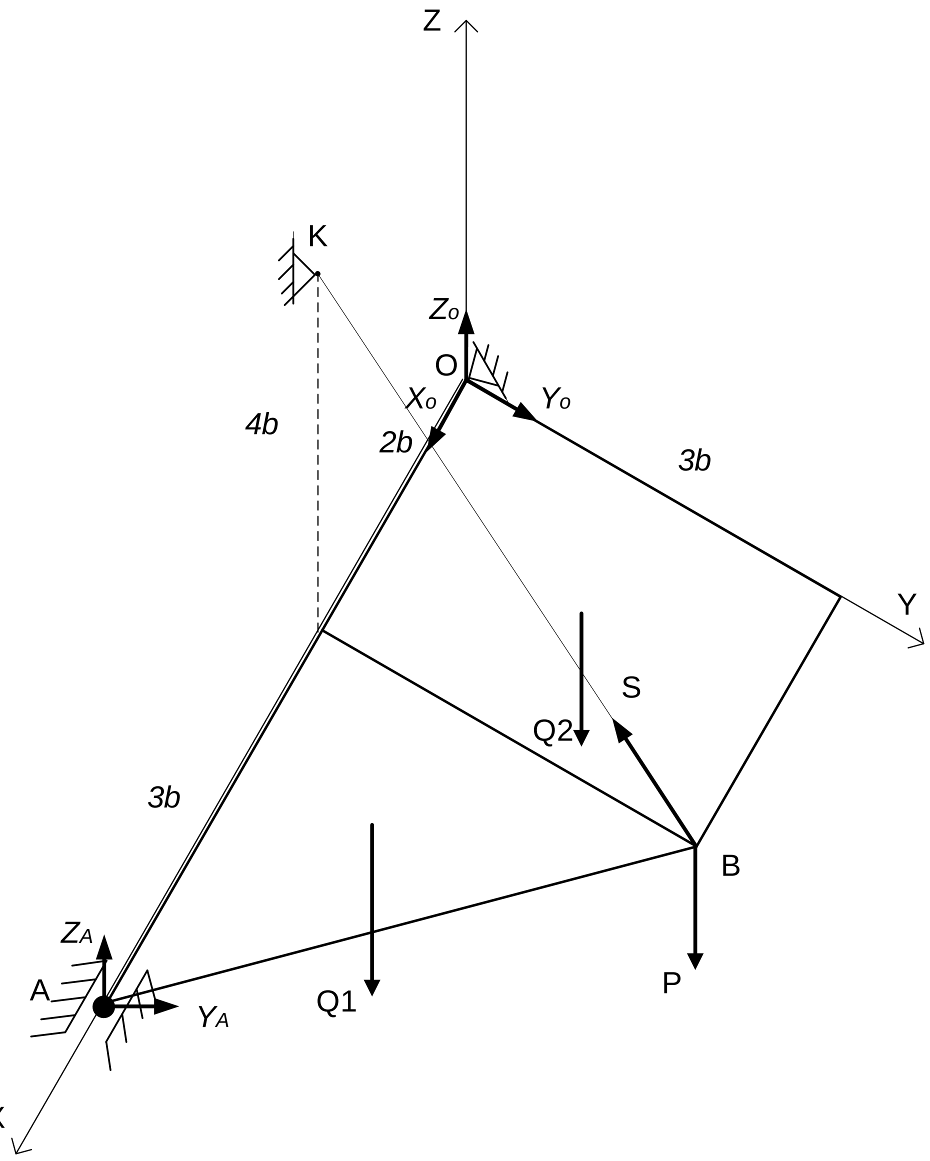
12. Ploča leži zakačena kanapom u B i K i sferni zglob u O i cilindričnim zglobom u A. Odrediti reakcije oba zgloba i silu u užetu ako je ploča opterećena u tački B silom P koja deluje u pravcu vertikale.



Rešenje:

Određivanje težina pojedinačnih delova (pravougaonik i trougao) ploče: (S je površina)

$$\boldsymbol{Q_1 + Q_2 = Q}$$
$$\boldsymbol{Q_1 : Q = S_1 : S}$$
$$\boldsymbol{S = 3b \cdot 2b + \frac{(3b)^2}{2} = \frac{21b^2}{2} = S_1 + S_2}$$
$$\boldsymbol{Q_1 = Q \cdot \frac{3}{7}\ ; \quad Q_2 = Q \cdot \frac{4}{7}}$$



Tri jednačine za sile i tri jednačine za moment:

$$\boldsymbol{\Sigma X = 0 \ \Rightarrow \ X_0 = 0}$$

$$\boldsymbol{\Sigma Y = 0 \ \Rightarrow \ Y_0 + Y_A - S \cdot \frac{3b}{\sqrt{(3b)^2 + (4b)^2}} = 0}$$

$$\boldsymbol{\Sigma Z = 0 \ \Rightarrow \ Z_0 + Z_A + S \cdot \frac{4b}{\sqrt{(3b)^2 + (4b)^2}} - Q_1 - Q_2 - P = 0}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{ox} = 0 \ \Rightarrow \ -Q_1 b - Q_2 \frac{3b}{2} - P \cdot 3b + S \cdot 3b \cdot \frac{4b}{\sqrt{(3b)^2 + (4b)^2}} = 0}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{oy} = 0 \ \Rightarrow \ -Z_A \cdot 5b - S \cdot 2b \cdot \frac{4b}{\sqrt{(3b)^2 + (4b)^2}} + Q_1 \cdot 3b + Q_2 b + P \cdot 2b = 0}$$

$$\Sigma M_{oz} = 0 \implies Y_A \cdot 5b - S \cdot 2b \cdot \frac{3b}{\sqrt{(3b)^2 + (4b)^2}} = 0$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se:

$$S = \frac{5}{4}\left(\frac{3}{7}Q + P\right)$$

$$Y_A = \frac{3}{10}\left(\frac{3}{7}Q + P\right)$$

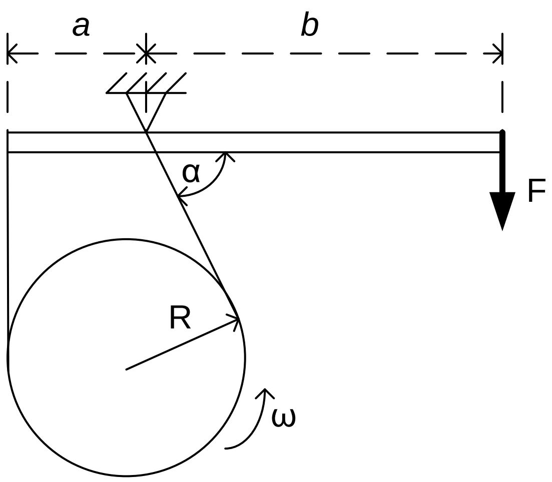
$$Z_A = \frac{Q}{5}$$

$$X_0 = 0$$

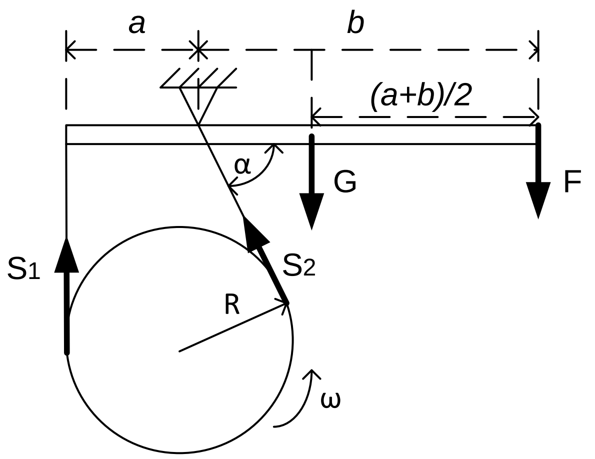
$$Y_0 = \frac{9}{20}\left(\frac{3}{7}Q + P\right)$$

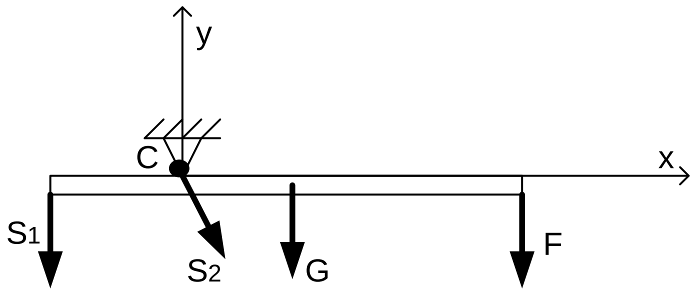
$$Z_0 = \frac{13}{35}Q$$

13. Kočioni sistem prikazan na slici se sastoji od štapa (dužine *a*+*b* i težine G), diska (poluprečnika R) i trake (koja sa štapom zaklapa ugao α). Koeficijent trenja između diska i kanapa je μ. Izvseti izraz za kočioni moment. Odrediti odnos dužina *a* i *b* tako da kočioni moment za naznačeni smer obrtanja diska ima vrednost 532,6 Nm. Date su sledece vrednsoti: F=1000N, G=100N, α=45°, R=0,2m i μ=0,5.



Rešenje:





$$S_1 > S_2, S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\varphi}, \varphi = 5\pi/4$$

$$M_k = S_1 \cdot R - S_2 \cdot R = S_1 \cdot R(1 - e^{-\mu(3\pi/2-\alpha)})$$

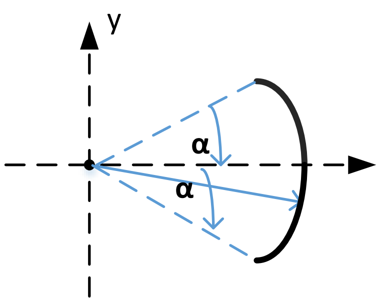
$$S_1 = \frac{M_k}{R(1-e^{-\mu(5\pi/4)})} = \frac{532{,}6}{0{,}2(1-0{,}1405)} = 3098{,}3N$$

$$\sum M_{CZ} = S_1 \cdot a - G \cdot (\frac{a+b}{2} - a) - F \cdot b \rightarrow \frac{b}{a} = 3$$

TEŽIŠTE

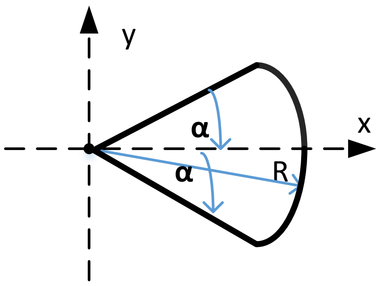
Težišta karakterističnih tela:

1) Kružni luk dimenzija R i α,



$$X_C = \frac{sin\alpha}{\alpha} R$$

2) Kružni isečak diska dimenzija R i α



$$X_C = 2/3R\frac{sin\alpha}{\alpha}$$

3) Polusferna ljuska

$$Z_C = \frac{R}{2}$$

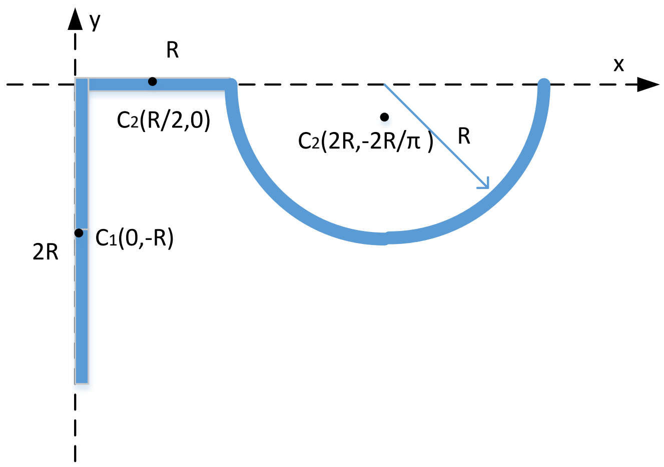
4) Kupa

$$Z_C = \frac{3}{4}H$$

5) Polovina kugle

$$Z_C = \frac{3}{8}R$$

14. Za telo od žice na slici odrediti težište.



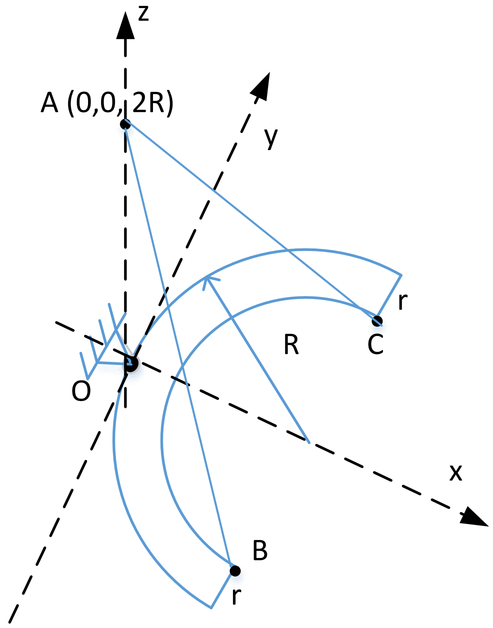
Rešenje:

$$C(X_C, Y_C)$$

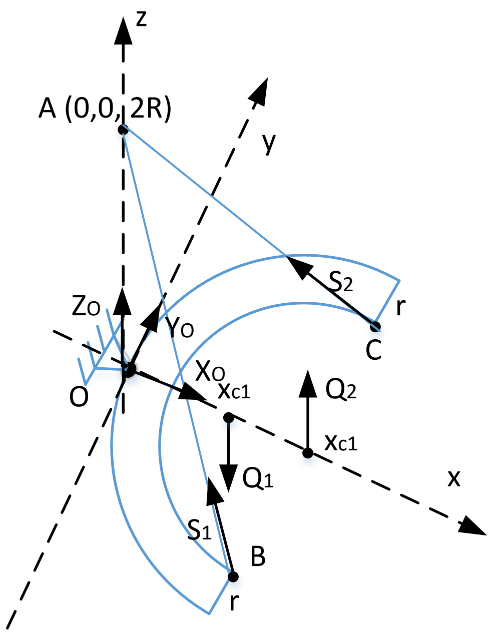
$$X_C = \frac{\sum x_k\, l_k}{l} = \frac{0 \cdot 2R + \frac{R}{2} \cdot R + 2R \cdot R\pi}{2R + R + R\pi} = \frac{R \cdot (\frac{1}{2} + 2\pi)}{3 + \pi}$$

$$Y_C = \frac{\sum y_k\, l_k}{l} = \frac{-R \cdot 2R + 0 \cdot R - \frac{2}{\pi}R \cdot R\pi}{2R + R + R\pi} = \frac{-4R}{3 + \pi}$$

15. Užad AB i BC uz pomoć sfernog zgloba O održavaju tanku homogenu krutu ploču u horizontalnoj ravni kao na slici. Ploča je u obliku polukružnog prstena težine Q=2000N. Odrediti sile u užadima i reakciju sfernog zgloba. Poznate su dimenzije R=2r=2m.



Rešenje:



Zadatak je moguće rešiti na dva načina:

1) tako što se može smatrati da je polukružni disk (poluprečnika *R*) pun i ima težinu Q_1 i centar mase X_{C1}=2/3R sinα/α (α= π/2) i isečak polukružnog diska (poluprečnika r) prazan i ima težinu Q_2 koja je suprotno orjentisana od Q_1 (centar mase X_{C2}=2/3r sinα/α). Pri ovome važi da je Q= Q_1- Q_2 *i* Q_1*:* Q_2*=* S_1*:* S_2*=* R^2*:* r^2*= 4: 1. Iz prethodnog sledi da je* Q_1=4/3 Q i Q_2=1/3 Q.

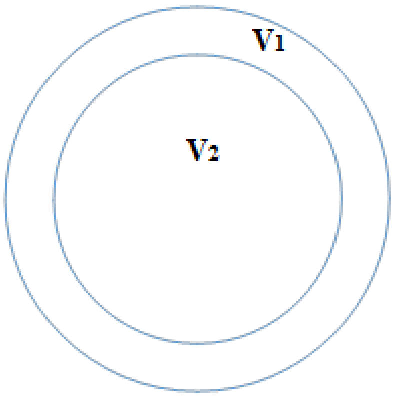
2) tako što se može odrediti centar mase polukružnog prstena $X_C=28r/9\pi$ i samo upotrebiti već poznata težina kompletnog krutog tela Q.

<u>Prvi način</u> podrazumeva postavljanje četiri jednačine iz statičkih uslova ravnoteže odakle će se odrediti veličine X_O, Y_O, Z_O i S. Zbog simetrije koja je prisutna na slici može se zaključiti da je $S_1=S_2=S$ (ovo se može zaključiti i iz jednačine SUR za $\sum M_{OX}=0$ koju nije potrebno pisati).

$$S_1 = S_2 = S$$
$$X_0 - 2S\frac{OB}{AB}\frac{r}{OB} = X_0 - 2S\frac{r\sqrt{5}}{r\sqrt{21}}\frac{r}{r\sqrt{5}} = 0$$
$$Y_0 = 0$$
$$Z_0 + Q_2 - Q_1 + 2S\frac{4r}{r\sqrt{21}} = 0$$
$$-Q_2X_{C2} + Q_1X_{C1} + 2S\frac{4r}{r\sqrt{21}}2r = Q_2\left(R - \frac{8r}{3\pi}\right) - Q_1\left(R - \frac{4r}{3\pi}\right) + 2S\frac{4r}{r\sqrt{21}}2r = 0$$

Iz prethodnih jednačina je moguće izračunati vrednosti svih nepoznatih: $X_O=505N$, $Y_O=0$, $Z_O=989{,}5N$ i $S=578{,}6N$.

<u>Drugi način</u> podrazumeva određivanje centra mase tela i to je moguće uraditi uz primenu Papus-Guldinove teroeme:



$$V = \left(\frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}r^3\pi\right)0{,}5 = \frac{28}{3}r^3\pi/2 = AS_C = A\cdot 2\pi\cdot X_C = (R^2\pi - r^2\pi)/2\cdot 2\pi\cdot X_C = 3r^2\pi^2\cdot X_C$$

$$X_C = \frac{28r}{9\pi}$$

Centar mase tela je moguće odrediti i na sledeći način:

$$X_c = \frac{S_1X_{c1} - S_2X_{c2}}{S_1 - S_2} = \frac{R^2\pi\frac{4R}{3\pi} - r^2\pi\frac{4r}{3\pi}}{R^2\pi - r^2\pi} = \frac{28r}{9\pi}$$

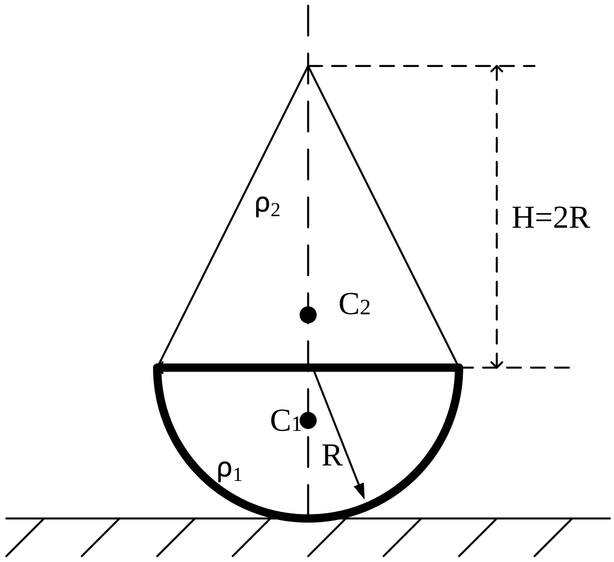
Dalje u drugom načinu zadatka je potrebno ponovo postaviti SUR, pri čemu će se promeniti samo jednačine:

$$Z_0 - Q + 2S\frac{4r}{r\sqrt{21}} = 0$$

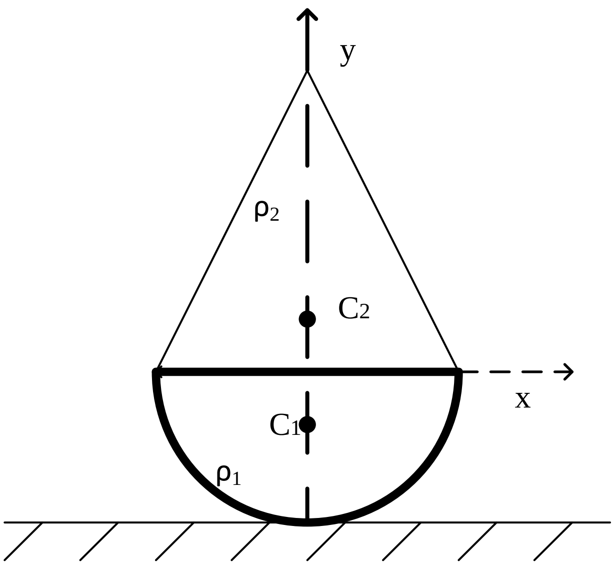
$$QX_C + 2S\frac{4r}{r\sqrt{21}}2r = Q(R - \frac{28r}{9\pi}) + 2S\frac{4r}{r\sqrt{21}}2r = 0$$

16. Polovina kugle poluprečnika R leži ha horizontalnom stolu. Ispitati stabilnost ravnoteže ako se na nju postavi konus visine $H = 2R$, a gustine:

a) $\rho_1 = \rho_2$
b) $\rho_1 = 12\rho_2$



Rešenje:



$$kupa: m_2 = \rho_2\frac{R^2\pi H}{3}$$

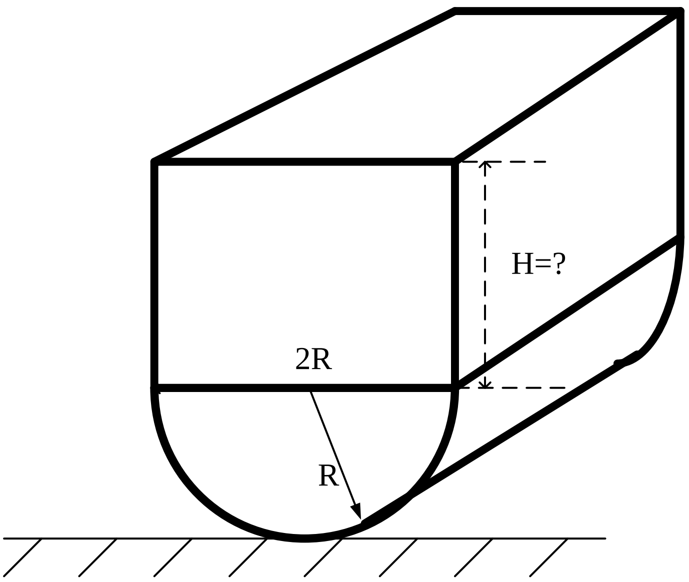
$$polulopta: m_1 = \rho_1\frac{1}{2}\frac{4R^3\pi}{3}$$

$$x_{c1} = 0; y_{c1} = -\frac{3}{8}R$$
$$x_{c2} = 0; y_{c2} = \frac{H}{4} = \frac{R}{2}$$
$$x_c = 0$$
$$y_c = \frac{m_1 y_{c1} + m_2 y_{c2}}{m_1 + m_2} < 0$$
$$-\frac{3}{8}R \cdot \rho_1 \frac{1}{2}\frac{4R^3\pi}{3} + \rho_2 \frac{R^2\pi H}{3} \cdot \frac{R}{2} < 0 \rightarrow H < R\sqrt{3\frac{\rho_1}{\rho_2}} \rightarrow stabi\,ln\,a\,ravnoteža$$

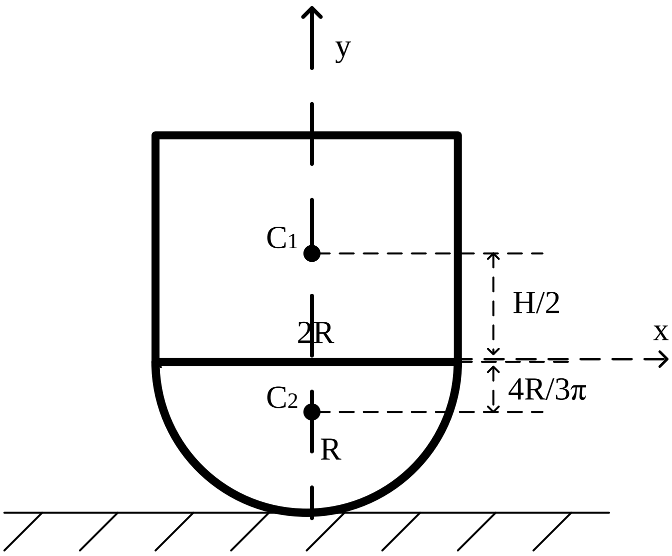
a) $\rho_2 = \rho_1 \rightarrow \; H < R\sqrt{3}$

b) $12\rho_2 = \rho_1 \; \rightarrow H < 6R$

17. Polovina homogenog čeličnog cilindra leži na horizontalnom stolu. Na cilindar je postavljena aluminijumska prizma dimenzija $2R \times L \times H$ tako da se stranice naslanjaju kao na slici. Odrediti H tako da je ravnoteža stabilna.



Rešenje:



$prizma: m_1 = \rho_1 2RHL$

$polusferna\ ljuska: m_2 = \rho_2 L \dfrac{R^2\pi}{2}$

$x_{c1} = 0; y_{c1} = \dfrac{H}{2}$

$x_{c2} = 0; y_{c2} = -\dfrac{4R}{3\pi} = -R\dfrac{sin\pi/2}{\pi/2}$

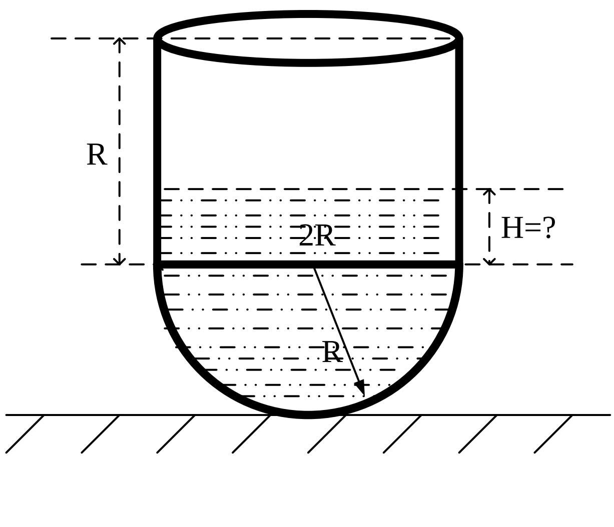
$x_c = 0$

$y_c = \dfrac{m_1 y_{c1} + m_2 y_{c2}}{m_1 + m_2} < 0 \rightarrow H < R\sqrt{\dfrac{2\rho_1}{3\rho_2}}$

$\rho_{1čelik} = 7{,}8 \cdot 10^3 kg/m^3 \rho_{2Al} = 2{,}8 \cdot 10^3 kg/m^3 \rightarrow H < 0{,}555m \rightarrow stabi\ ln\ a\ ravnoteža$

18. Čelična posuda se sastoji od polusferne ljuske i cilindričnog dela istog prečnika, kao na slici.

a) Ispitati stabilnost ravnoteže ako je posuda prazna
b) Odrediti maksimalnu masu aluminijuma koju je moguće nasuti u posudu tako da ravnoteža kalupa sa aluminijumskim delom bude stabilna.



Rešenje:

a) Stabilnost kada tećnosti nema i posuda je prazna.

$$A_1 = 2R^2\pi$$
$$A_2 = 2R\pi \cdot R$$
$$x_{c1} = 0; y_{c1} = -\frac{R}{2}$$
$$x_{c2} = 0; y_{c2} = \frac{R}{2}$$
$$x_c = 0$$
$$y_c = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2} = 0 \rightarrow neodređena\ ravnoteža\ prazne\ posude$$

b) Kako se tečnost naliva centar mase je u početku u delu ljuske, y_c je negativno. Kada tečnost počne da se naliva u deo šupljeg valjka onda se centar mase pomera naviše i potrebno je odrediti H. Sada pored centra mase posude (koji iznosi y_{c1}=0) postoji centar mase polulopte y_{c2}=-3/8R (polusferna ljuska koja je napunjena tečnošću) i centar mase valjka (nastalog od dolivanja tečnosti u deo šupljeg valjka) y_{c3}=H/2.

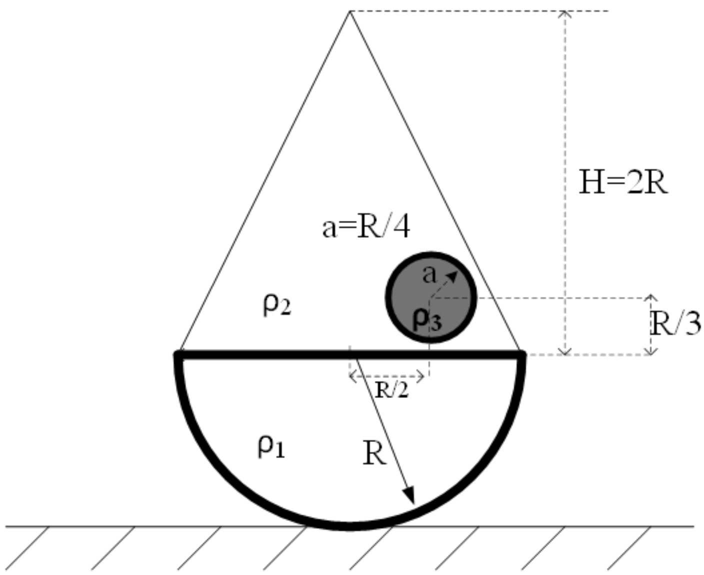
$$y_c = \frac{m_1 y_{c1} + m_2 y_{c2} + m_3 y_{c3}}{m_1 + m_2 + m_3} < 0 \rightarrow m_2 y_{c2} + m_3 y_{c3} < 0$$

$$-\frac{3}{8}R \cdot \frac{1}{2}\frac{4R^3\pi}{3} + \frac{H}{2}R^2\pi H < 0 \rightarrow H < \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$V_{maxAl} = \frac{2}{3}R^3\pi + \frac{R}{\sqrt{2}}R^2\pi$$

Ispitni zadaci

19. Polovina kugle poluprečnika R i gustine ρ_1 leži na horizontalnom stolu. Na nju je postavljen konus $H=2R$ i gustine $\rho_2=\rho_1/6$ u kome je unutrašnja loptasta šupljina poluprečnika a=$R/4$ koja je pozicionirana kao na slici ispunjena sa materijalom gustine $\rho_3= \rho_1/25$. Ako se smatra da su sve veličine poznate, ispitati stabilnost ravnoteže i odrediti ugao nagiba celog tela.



Rešenje:

$$kupa: m_2 = \rho_2 \frac{R^2 \pi H}{3} = \rho_2 \frac{128a^3\pi}{3} = 42{,}67\rho_2 a^3 \pi (5poena)$$

$$polulopta: m_1 = \rho_1 \frac{1}{2}\frac{4R^3\pi}{3} = 6\rho_2 \frac{128a^3\pi}{3} = 256\rho_2 a^3\pi (5)$$

$$lopta: m_3 = (\rho_3 - \rho_2)\frac{4a^3\pi}{3} = -1{,}0137\rho_2 a^3 \pi (5)$$

$$x_{c1} = 0; y_{c1} = -\frac{3}{8}R = -\frac{3a}{2}(5)$$

$$x_{c2} = 0; y_{c2} = \frac{H}{4} = 2a(5)$$

$$x_{c3} = \frac{R}{2} = 2a; y_{c3} = \frac{R}{3} = \frac{4a}{3}(5)$$

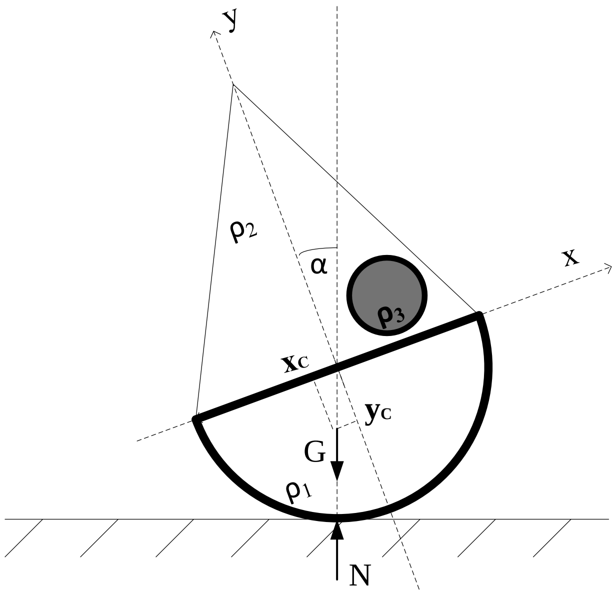
$$x_c = \frac{m_1 x_{c1} + m_2 x_{c2} + m_3 x_{c3}}{m_1 + m_2 + m_3} = -0{,}0067a = -0{,}0017R(20)$$

$$y_c = \frac{m_1 y_{c1} + m_2 y_{c2} + m_3 y_{c3}}{m_1 + m_2 + m_3} = -1{,}008a = -0{,}252R(20)$$

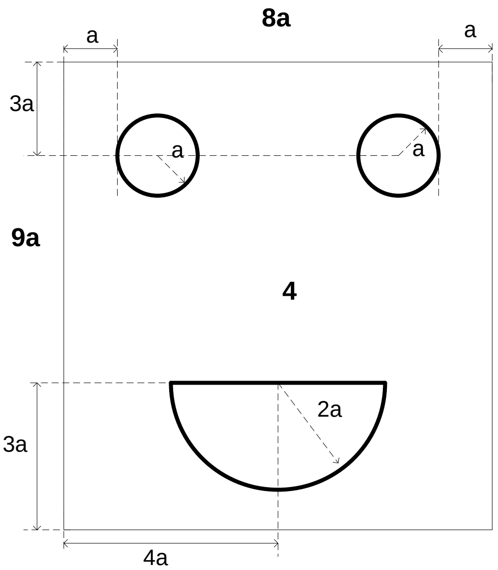
$$y_c < 0 \rightarrow stabi\ ln\, a - ravnoteza$$

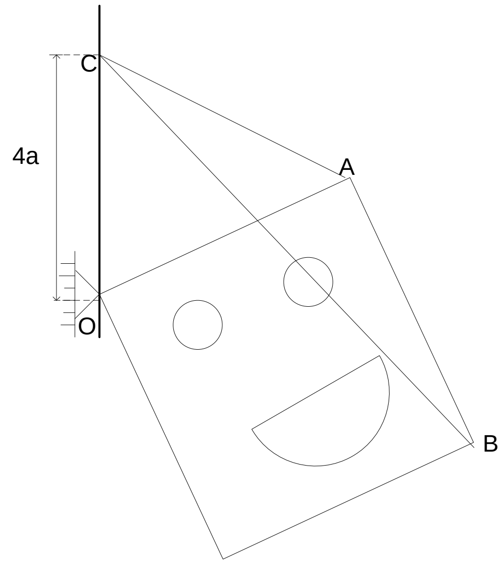
$$\alpha = arctan\left(\frac{0{,}0067a}{1{,}008a}\right) = 0{,}3865°(20)$$

Slika (10 poena)



20. Tanka homogena ploča u obliku pravougaonika dimenzija 8*a* x 9*a* ima tri isečka u obliku smeška (dva kruga poluprečnika *a* i polukrug poluprečnika 2*a*. Težina ploče je Q. Ploču u horizontalnom položaju održavaju konci AC i BC i sferni zglob O. Odrediti sile reakcije u zglobu O i sile zatezanja S_A i S_B. Sile izraziti u funkciji Q.





Rešenje:

Debljina svih elemenata je kostantna pa se u proračunima ta dimenzija može zanemariti.

$$s_1 = s_2 = a^2\pi, s_3 = 2s_1$$

$$s_4 = 72a^2$$

$$x_{c1} = 3a; y_{c1} = 2a$$

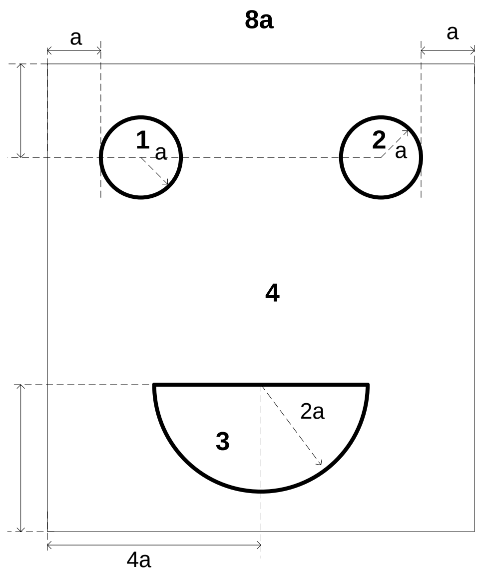
$$x_{c2} = 3a; y_{c2} = 6a$$

$$x_{c3} = 6a + \frac{8a}{3\pi}; y_{c3} = 4a$$

$$x_{c4} = 4{,}5a; y_{c4} = 4a$$

$$x_c = \frac{-s_1x_{c1} - s_2x_{c2} - s_3x_{c3} + s_4x_{c4}}{-s_1 - s_2 - s_3 + s_4} = 4{,}41a$$

$$y_c = \frac{-s_1y_{c1} - s_2y_{c2} - s_3y_{c3} + s_4y_{c4}}{-s_1 - s_2 - s_3 + s_4} = 4a$$



U zadatku su nepoznate tri sile zatezanja koje je potrebno izraziti preko promenljivih ρ i a.

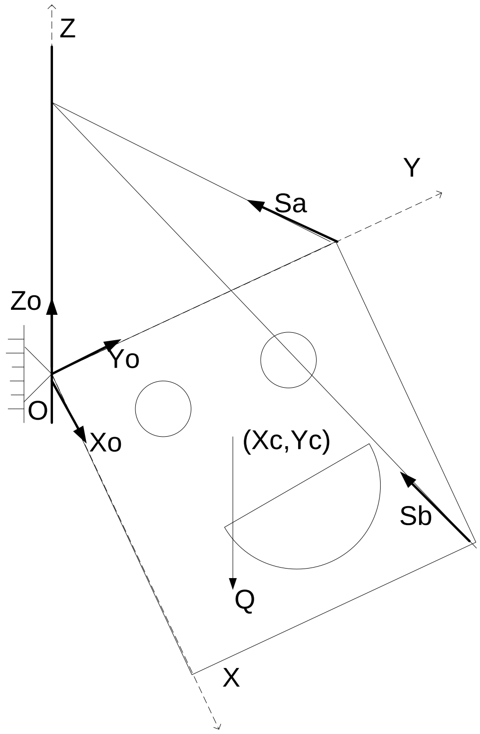
$$\sum X = 0 \rightarrow X_0 - S_B \frac{BO}{BC}\frac{9a}{BO} = 0$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow Y_0 - S_A \frac{8a}{AC} - S_B \frac{BO}{BC}\frac{8a}{BO} = 0$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow Z_0 + S_A \frac{4a}{AC} - S_B \frac{4a}{BC} = 0$$

$$\sum M_{OY} = 0 \rightarrow - S_B \frac{4a}{BC} 9a + Qx_C = 0$$

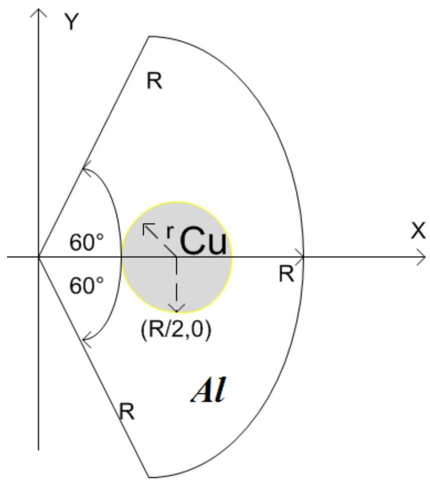
$$\sum M_{Ox} = 0 \rightarrow S_B \frac{4a}{BC} 8a + S_A \frac{4a}{AC} 8a + Qy_C = 0$$

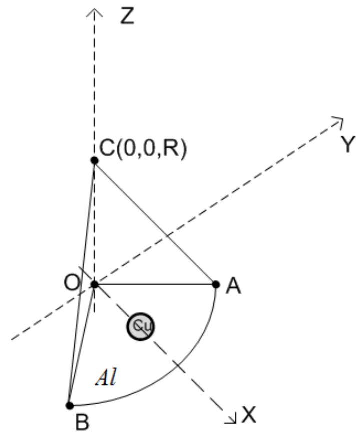


Rešenje sistema, rezultati, su:

$$S_A == 0{,}025Q$$
$$S_B == 1{,}55Q$$
$$X_0 == 1{,}1Q$$
$$Y_0 == Q$$
$$Z_0 == 0{,}5Q$$

21. U kružni isečak (120°) aluminijumske ploče umetnut je bakarni kružni deo. Ploča se održava u horizontalnom položaju pomoću sfernog zgloba O i užadi AC i BC zanemarljive težine, kao na slici. Tačka C se nalazi na vertikalnom zidu, na udaljenosti *R* od zgloba. Odrediti silu reakcije zgloba O i sile zatezanja u užadima. Podaci za ploče su: *R*=*4r*=100 cm, *d*=1 cm, ρ_{Al}=2700 kg/m^3 i ρ_{Cu}=8900 kg/m^3.





Rešenje:

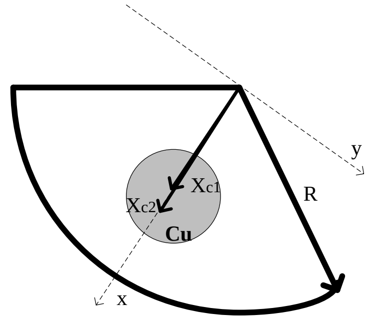
Prvo je potrebno odrediti težište ploče. To je moguće uraditi na više načina. Jedan od načina je da se pretpostavi da je ploča cela od Al, a od Cu kružnog dela oduzima se Al deo.

$$m_1 = m_{Fe} = \rho_{Al}\frac{1}{2}\frac{2\pi}{3}R^2 d = 2700\frac{\pi}{3}10^{-2} = 28{,}26kg$$

$$m_2 = m_{Cu-Al} = r^2\pi(\rho_{Cu} - \rho_{Al})d = 0{,}25^2\pi(8900 - 2700)0{,}01 = 12{,}17kg$$

$$x_{c1} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 0{,}55m$$

$$x_{c2} = 2r = 0{,}5m$$



U zadatku je pet nepoznatih pa je potrebno postaviti pet jenačina:

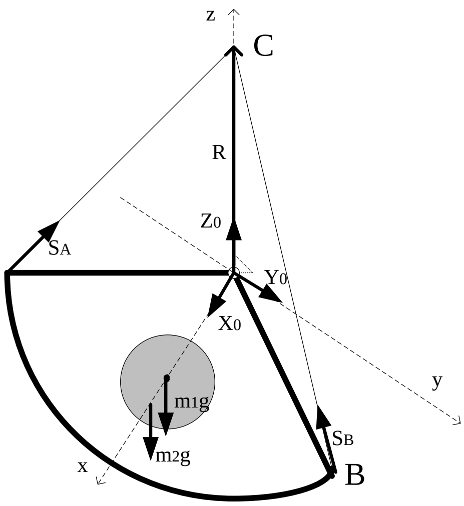
$$S_A = S_B = S$$

$$X_0 - 2S\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = 0$$

$$Y_0 - S\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} + S\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = 0$$

$$Z_0 + 2S\cos\frac{\pi}{4} - (m_1 + m_2)g = 0$$

$$(m_2 x_{c2} + m_1 x_{c1})g - 2S\cos\frac{\pi}{4}R\sin\frac{\pi}{6} = 0$$



Rešenje sistema, rezultati, su:

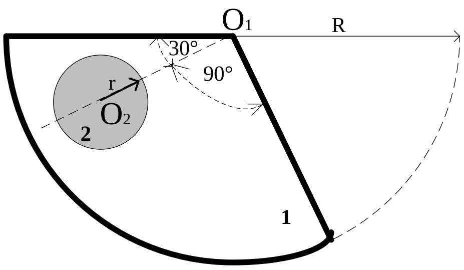
$$S = \frac{(m_2 x_{c2} + m_1 x_{c1})g}{2\cos\frac{\pi}{4}R\sin\frac{\pi}{6}} = 300{,}93N$$

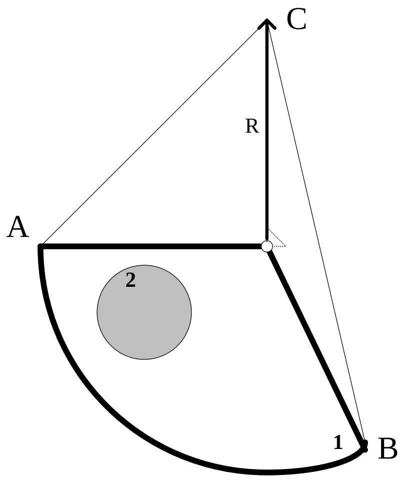
$$Z_0 = -2S\cos\frac{\pi}{4} + (m_1 + m_2)g = -27{,}73N$$

$$Y_0 = 0$$

$$X_0 = 2S\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = 213{,}43N$$

22. U kružni isečak ploče (120°) gustine materijala ρ_1 umetnut je kružni deo gustine materijala ρ_2. Ploča se održava u horizontalnom položaju pomoću sfernog zgloba O_1 i užadi AC i BC zanemarljive težine, kao na slici. Tačka C se nalazi na vertikalnom zidu, na udaljenosti *R* od zgloba. Odrediti silu reakcije zgloba i sile zatezanja u užadima. Podaci za ploču su:poluprečnik $R=4r$=100 cm, debljina ploče d=1 cm, gustine za materijale su:ρ_1=5000 kg/m^3 i ρ_2=10000 kg/m^3.





Rešenje:

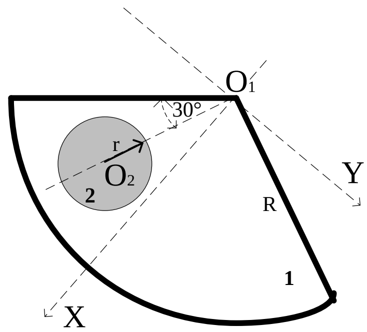
Prvo je potrebno odrediti težište ploče. To je moguće uraditi na više načina. Jedan od načina je da se pretpostavi da je ploča cela od Fe, a od Cu kružnog dela oduzima se Fe deo.

$$m_1 = \rho_1 \frac{1}{2}\frac{2\pi}{3}R^2 d = \rho_1 \frac{\pi}{3}10^{-2} = 52{,}33kg$$

$$m_2 = m_{2-1} = r^2\pi(\rho_2 - \rho_1)d = 0{,}25^2\pi(\rho_2 - \rho_1)10^{-2} = 9{,}8125kg$$

$$x_{c1} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 0{,}55m; y_{c1} = 0$$

$$x_{c2} = 2r\cos\frac{\pi}{6} = r\sqrt{3}; y_{c1} = 2r\sin\frac{\pi}{6} = r$$



U zadatku je pet nepoznatih pa je potrebno postaviti pet jenačina:

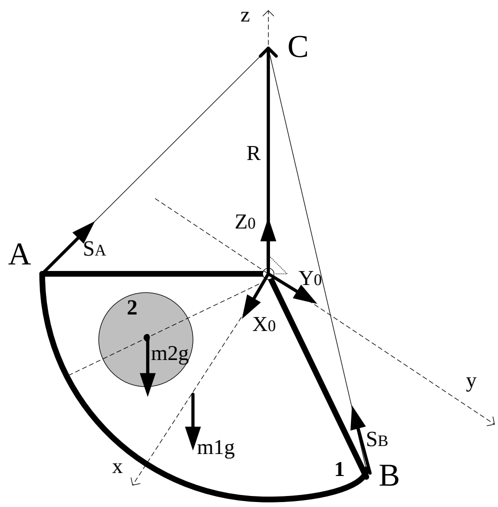
$$X_0 - (S_A + S_B)\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = 0$$

$$Y_0 + (S_A - S_B)\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = 0$$

$$Z_0 + (S_A + S_B)\cos\frac{\pi}{4} - (m_1 + m_2)g = 0$$

$$(m_2 x_{c2} + m_1 x_{c1})g - (S_A + S_B)\cos\frac{\pi}{4}R\sin\frac{\pi}{6} = 0$$

$$m_2 y_{c2} g + (S_B - S_A)\cos\frac{\pi}{4}R\sin\frac{\pi}{3} = 0$$



Rešenje sistema, rezultati, su:

$$S_A = 488{,}4N$$

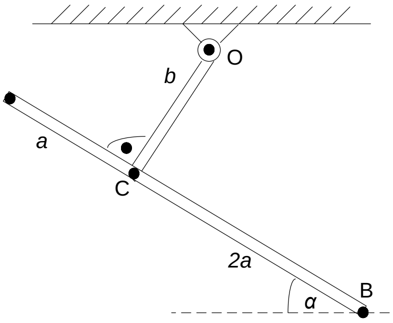
$$S_B = 448{,}34N$$

$$Z_0 = -(S_A + S_B)\cos\frac{\pi}{4} + (m_1 + m_2)g = -38{,}975N$$

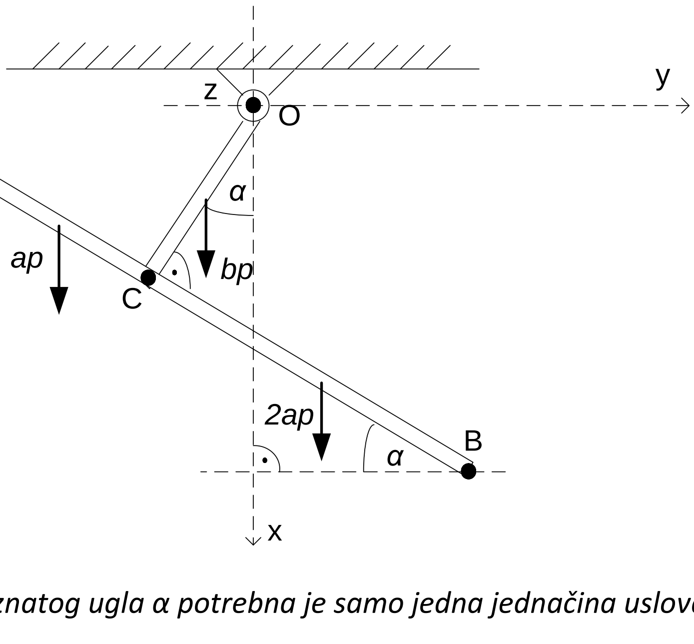
$$Y_0 = -(S_A - S_B)\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = -(S_A + S_B)\frac{\sqrt{6}}{4} = -24{,}43N$$

$$X_0 = (S_A + S_B)\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = (S_A + S_B)\frac{\sqrt{2}}{4} = 330{,}2N$$

23. Dva štapa AB i CO vezani su u tački C pod pravim uglom.Taj sistem se može obrtati oko horizontalne Oz ose. Dužine pojedinih delova su: CB=2a,AC=a i CO=b.Podužne dužine štapova su jednake i iznose p. Odrediti ugao α koji osa štapa AB u ravnotežnom položaju sistema zaklapa sa horizontalom. Poprečne dimenzije štapova se mogu zanemariti.



Rešenje:



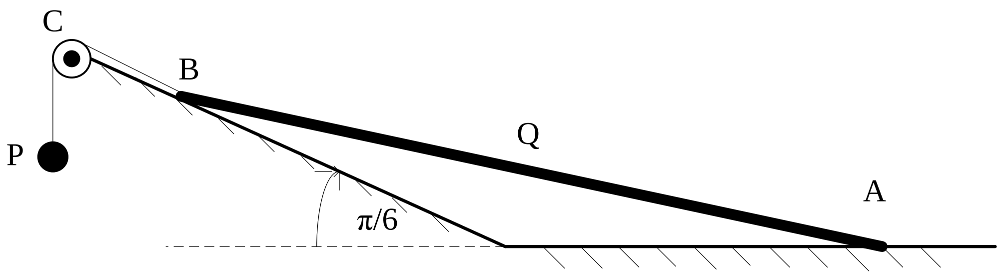
Za određivanje nepoznatog ugla α potrebna je samo jedna jednačina uslova ravnoteže:

$$\sum M_{Oz} = 0$$

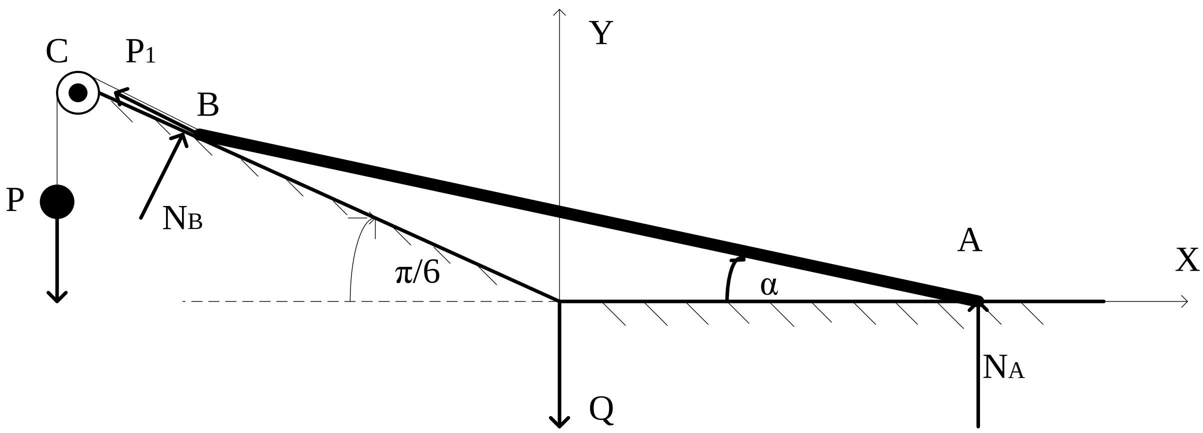
$$\sum M_{Oz} = pa(\frac{a}{2}\cos\alpha + b\sin\alpha) + pb\frac{b}{2}\sin\alpha - 2pa(a\cos\alpha - b\sin\alpha) = 0$$

$$\rightarrow tg\alpha = \frac{3a^2}{(6a+b)b}$$

24. Homogena greda AB, težine Q=100N, oslanja se jednim krajem A na glatki horizontalni pod, a drugim krajem B na glatku strmu ravan, koja je nagnuta pod uglom π/6 prema horizontu. Za kraj B grede vezano je uže, koje je prebačeno preko nepomičnog kotura C, a nosi teg P. Deo BC užeta je paralelan strmoj ravni. Odrediti intenzitet sile P i sila pritisaka N_A i N_B grede na podlogu. Trenje na koturu se može zanemariti.



Rešenje:



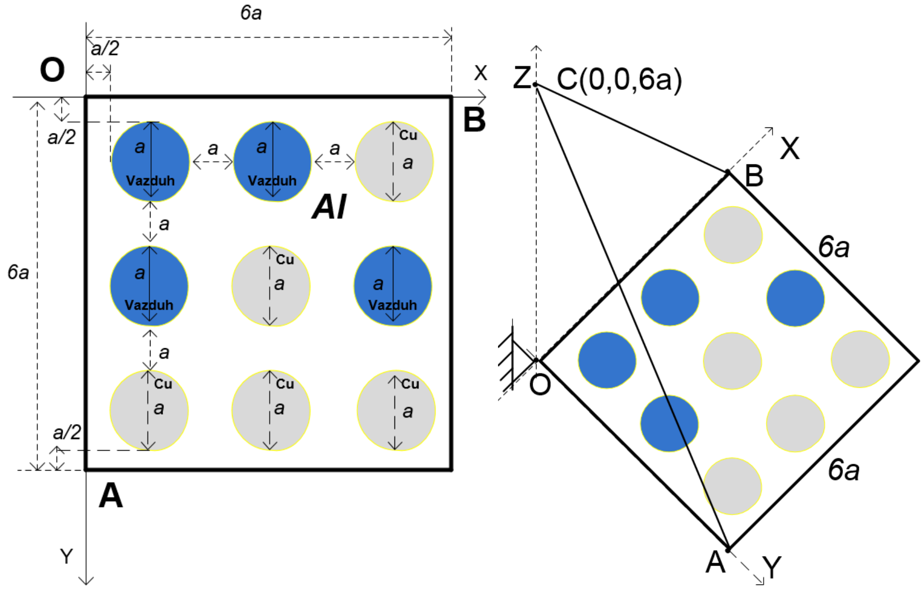
Jednačine ravnoteže su:

$$\sum X_i = N_B \cos\pi/3 - P\cos\pi/6 = 0$$
$$\sum Y_i = N_B \cos\pi/6 + P\cos\pi/3 - Q + N_A = 0$$
$$\sum M_{BZ} = N_A L\cos\alpha - QL/2\cos\alpha = 0$$

U zadatku ugao α i dužina grede L su nepoznate, ali su nepotrebne pri određivanju nepoznatih sila:

$P = 25N$
$N_A = Q/2 = 50N$
$N_B = Q\sqrt{3}/4 = 43{,}3N$

25. Kvadratna aluminijumska ploča (6*a* x 6*a*) ima 9 kružnih šupljina. Neke od kružnih šupljina su ispunjene bakrom kao na slici. Ploča se održava u horizontalnom položaju pomoću sfernog zgloba O i užadi AC i BC zanemarljive težine, kao na slici. Tačka C se nalazi na vertikalnom zidu, na udaljenosti *6a* od zgloba. Odrediti silu reakcije zgloba i sile zatezanja u užadima AC i BC. Podaci za ploču su: poluprečnik *a*=10 cm, debljina ploče *d*=1 cm, gustine za materijale su: ρ_{Al}=2700 kg/m^3 i ρ_{Cu}=8900 kg/m^3, g=9,81m/s^2.



Rešenje:

Prvo je potrebno odrediti težište ploče.

$$m_1 = m_{Al} = \rho_{Al} 36a^2 d = 2700 \cdot 36 \cdot 10^{-4} = 9{,}72kg$$
$$m_2 = m_{Cu-Al} = a^2\pi(\rho_{Cu} - \rho_{Al})d = 0{,}1^2\pi(8900 - 2700)0{,}01 = 1{,}947kg$$
$$m_3 = m_{-Al} = a^2\pi(\rho_{Al})d = 0{,}1^2\pi(2700)0{,}01 = 0{,}8478kg$$
$$x_{c1} = y_{c1} = 3a = 0{,}3m$$
$$x_{c2} = x_{c5} = x_{c8} = a = 0{,}1m$$
$$x_{c3} = x_{c6} = x_{c9} = 3a = 0{,}3m$$
$$x_{c4} = x_{c7} = x_{c10} = 5a = 0{,}5m$$
$$y_{c2} = y_{c3} = y_{c4} = a = 0{,}1m$$
$$y_{c5} = y_{c6} = y_{c7} = 3a = 0{,}3m$$
$$y_{c8} = y_{c9} = y_{c10} = 5a = 0{,}5m$$

(**20 poena**)

$$x_c = \frac{m_1 x_{c1} - m_3(x_{c2} + x_{c3} + x_{c5} + x_{c7}) + m_2(x_{c4} + x_{c6} + x_{c8} + x_{c9} + x_{c10})}{m_1 - 4m_3 + 5m_2} = 0{,}335m$$

$$y_c = \frac{m_1 y_{c1} - m_3(y_{c2} + y_{c3} + y_{c5} + y_{c7}) + m_2(y_{c4} + y_{c6} + y_{c8} + y_{c9} + y_{c10})}{m_1 - 4m_3 + 5m_2} = 0{,}37m$$

$$Q = 16{,}06kg9{,}81m/s^2 = 157{,}6N$$

U zadatku je pet nepoznatih pa je potrebno postaviti pet jednačina:

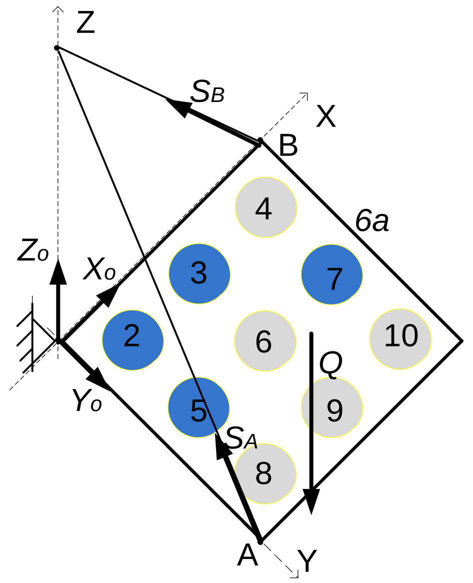
$$X_0 - S_B\cos\frac{\pi}{4} = 0$$

$$Y_0 - S_A\cos\frac{\pi}{4} = 0$$

$$Z_0 + S_A\cos\frac{\pi}{4} + S_B\cos\frac{\pi}{4} - Q = 0$$ (**50 poena**)

$$Qy_c - S_A\cos\frac{\pi}{4}6a = 0$$

$$-Qx_c + S_B\cos\frac{\pi}{4}6a = 0 = 0$$



Rešenje sistema, rezultati su:

$$S_A = 125N$$

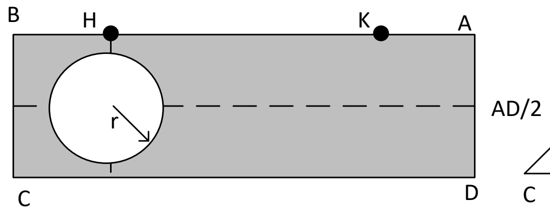
$$S_B = 138N$$

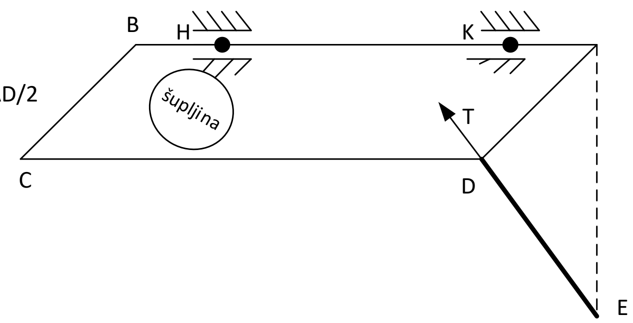
$$Z_0 = -27{,}8N$$ (**30 poena)**

$$Y_0 = 88{,}1N$$

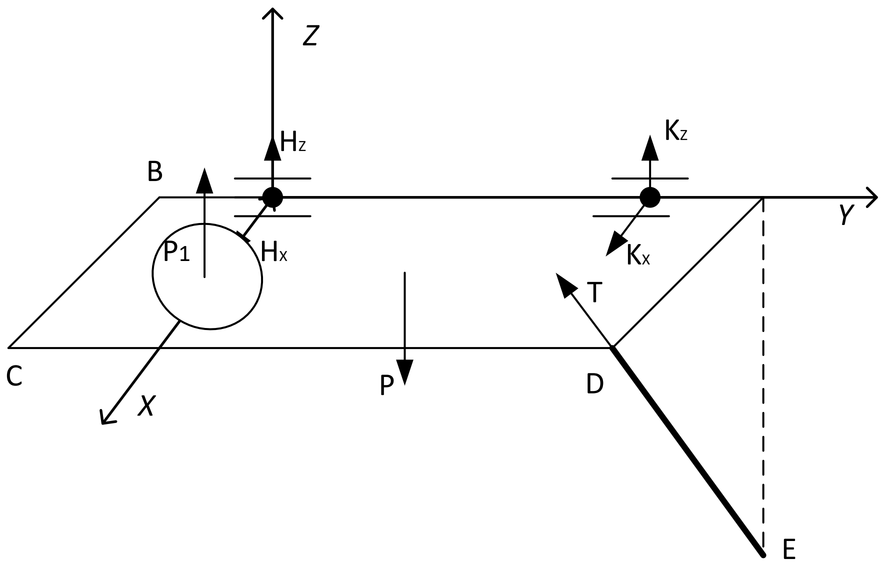
$$X_0 = 97{,}3N$$

26. Tanka daska ABCD može se obrtati oko horizontalne ose AB. Štap DE, je krajnjim tačkama zglobno vezan, u tački E za vertikalni zid BAE, a u tački D za dasku koju održava u horizontalnom položaju. Težina daske je 80 N. Daska ima kružnu šupljinu poluprečnika r=0,2 m kao na slici. Dimenzije su: AB=1,5 m, AD=0,6 m, AK=BH=0,25 m. Dužina štapa je ED=0,75 m. Odrediti reakcije cilindričnih zglobova K i H i silu T.





Rešenje:



$P - P_1 = 80N$

$P : P_1 = AD \times AB : r^2\pi$

$P_1 = 13N, P = 93N$

$\Sigma X = 0 \Rightarrow K_X + H_X + T_X = 0$

$\Sigma Y = 0$

$\Sigma Z = 0 \Rightarrow K_Z + H_Z + T_Z - P + P_1 = 0$

$\Sigma M_X = 0 \Rightarrow T_Z \overline{AH} + K_Z \overline{HK} - P\overline{HK}/2 = 0$

$\Sigma M_Y = 0 \Rightarrow (P - P_1)\overline{AD}/2 - T_Z \overline{AD} = 0$

$\Sigma M_Z = 0 \Rightarrow -T_X \overline{AH} - K_X \overline{HK} = 0$

$H_X = 40/3N$

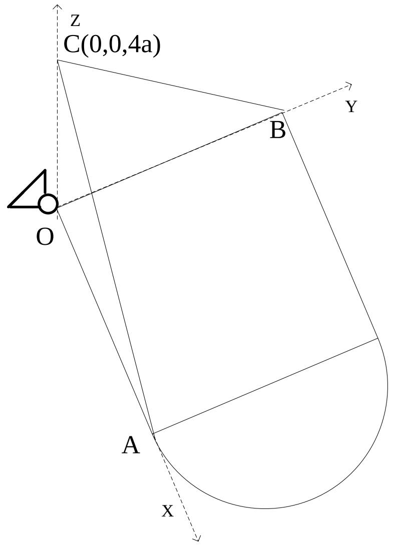
$H_Z = 43{,}5N$

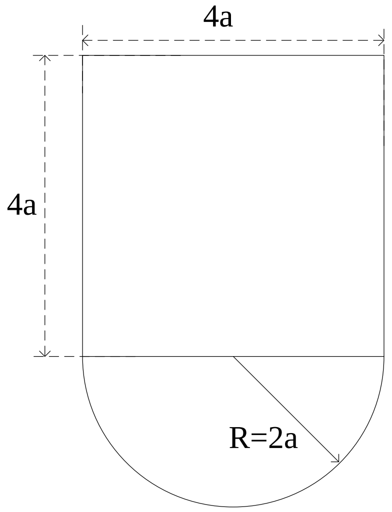
$K_X = -200/3N$

$K_Z = -3{,}5N$

$T = 200/3N$

27. Tanka homogena ploča u obliku kvadrata dimenzija 4*a* x 4*a* i polukruga poluprečnika *R*=2*a* ima težinu Q. Ploču u horizontalnom položaju održavaju konci AC i BC i sferni zglob O. Odrediti sile reakcije u zglobu O i sile zatezanja S_A i S_B. **Postaviti jednačine statičkih uslova ravnoteže i ne rešavati sistem jednačina!**





Rešenje:

Debljina homogene ploče je konstantna pa se u proračunima ta dimenzija može zanemariti.

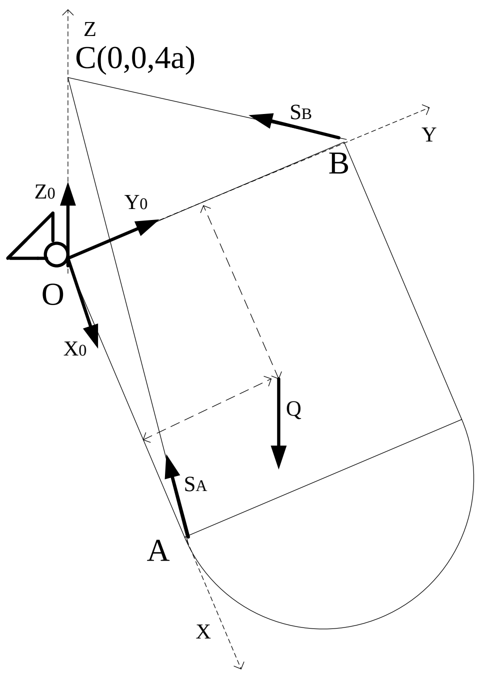
$$s_1 = 16a^2, s_2 = 2a^2\pi$$

$$x_{c1} = 2a; y_{c1} = 2a$$

$$x_{c2} = 2a; y_{c2} = 4a + \frac{8a}{3\pi} = 4{,}85a$$

$$x_c = \frac{s_1 x_{c1} + s_2 x_{c2}}{s_1 + s_2} = 2{,}8a$$

$$y_c = \frac{s_1 y_{c1} + s_2 y_{c2}}{s_1 + s_2} = 2a$$



U zadatku su nepoznate tri sile reakcije zgloba i dve sile zatezanja.

$$\sum X = 0 \rightarrow X_0 - S_A \frac{AO}{AC} = X_0 - S_A \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow Y_0 - S_B \frac{BO}{BC} = Y_0 - S_B \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

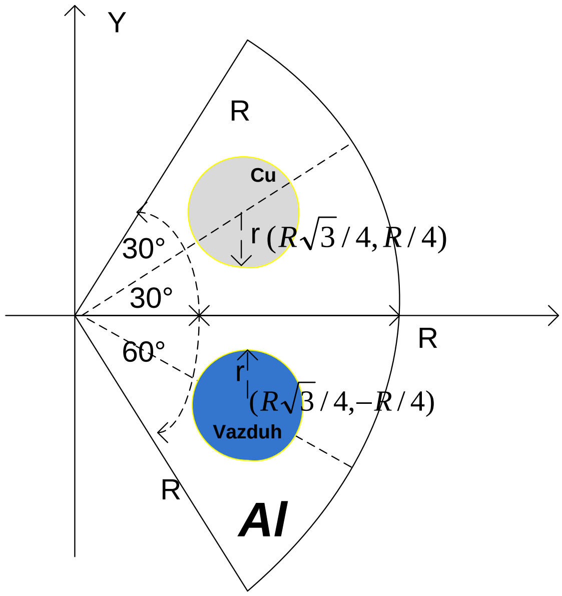
$$\sum Z = 0 \rightarrow Z_0 + S_A \frac{4a}{AC} + S_B \frac{4a}{BC} - Q = Z_0 + (S_A + S_B)\frac{1}{\sqrt{2}} - Q = 0$$

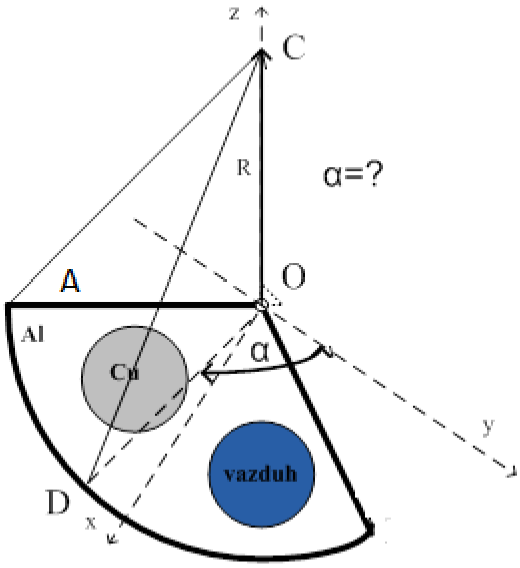
$$\sum M_{OY} = 0 \rightarrow - S_A \frac{1}{\sqrt{2}} 4a + Qx_C = 0$$

$$\sum M_{Ox} = 0 \rightarrow S_B \frac{1}{\sqrt{2}} 4a - Qy_C = 0$$

28. U kružni isečak (120°) aluminijumske ploče umetnut je bakarni kružni deo. Ploča takođe ima i prazan kružni isečak u kome nema umetka. Oba isečka se nalaze na polovini poluprečnika R i simetrična su u odnosu na x-osu. Ploča se održava u horizontalnom položaju pomoću sfernog zgloba O i užadi AC i DC zanemarljive težine, kao na slici. Tačka C se nalazi na vertikalnom zidu, na udaljenosti *R* od zgloba. Odrediti silu reakcije zgloba i ugao α (<yOD) tako da sile zatezanja u užadima AC i DC budu

iste. Podaci za ploču su: poluprečnik R=4r=100 cm, debljina ploče d=1 cm, gustine za materijale su: ρ_{Al}=2700 kg/m^3 i ρ_{Cu}=8900 kg/m^3.





Rešenje:

Prvo je potrebno odrediti težište ploče. To je moguće uraditi na više načina. Jedan od načina je da se pretpostavi da je ploča cela od Al, a od Cu kružnog dela oduzima se Al deo.

$$m_1 = m_{Al} = \rho_{Al}\frac{1}{2}\frac{2\pi}{3}R^2 d = 2700\frac{\pi}{3}10^{-2} = 28{,}26kg$$

$$m_2 = m_{Cu-Al} = r^2\pi(\rho_{Cu} - \rho_{Al})d = 0{,}25^2\pi(8900 - 2700)0{,}01 = 12{,}17kg$$

$$m_3 = m_{-Al} = r^2\pi(\rho_{Al})d = 0{,}25^2\pi(2700)0{,}01 = 5{,}29kg$$

$$x_{c1} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 0{,}55m;\, y_{c1} = 0$$

(20 poena)

$$x_{c2} = 2r\cdot\cos 30 = R\sqrt{3}/4 = 0{,}43m;\, y_{c2} = R/2\sin 30 = R/4 = 0{,}25m$$

$$x_{c3} = 2r\cdot\cos 30 = R\sqrt{3}/4 = 0{,}43m;\, y_{c3} = -R/2\sin 30 = -R/4 = -0{,}25m$$

U zadatku je šest nepoznatih pa je potrebno postaviti šest jenačina:

$$S_A = S_D = S$$

$$X_0 - S\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - S\cos\frac{\pi}{4}\sin(\alpha) = 0$$

$$Y_0 + S\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} - S\cos\frac{\pi}{4}\cos(\alpha) = 0$$

$$Z_0 + S\cos\frac{\pi}{4} + S\cos\frac{\pi}{4} - (m_1 + m_2 - m_3)g = 0$$

(50 poena)

$$(m_2 x_{c2} + m_1 x_{c1} - m_3 x_{c3})g - S\cos\frac{\pi}{4}R\sin\frac{\pi}{6} - S\cos\frac{\pi}{4}R\sin(\alpha) = 0$$

$$(m_2 y_{c2} + m_3 y_{c3})g - S\cos\frac{\pi}{4}R\cos(\alpha) - S\cos\frac{\pi}{4}R\sin\frac{\pi}{3} = 0$$

Da ne postoji Cu dodatak ugao α bi bio 30, pa je on veći. Rešenje sistema, rezultati su:

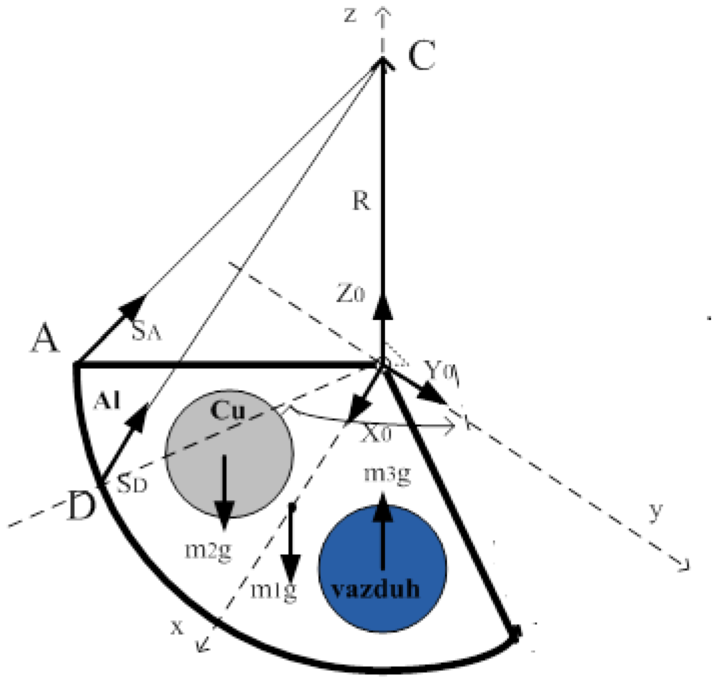
$S = 193N$

$\alpha = 56{,}1^\circ$

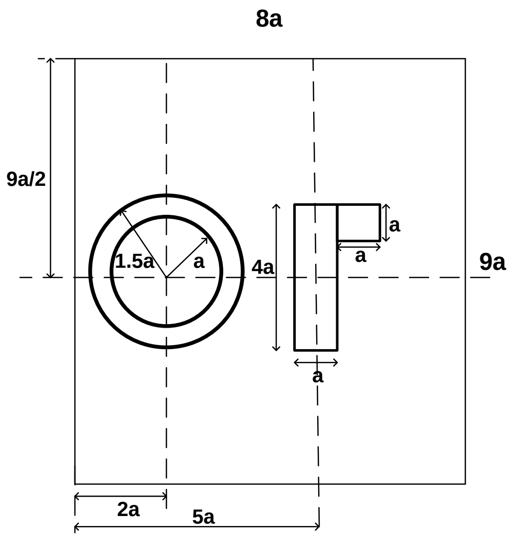
$Z_0 = 70{,}6N$ **(30 poena)**

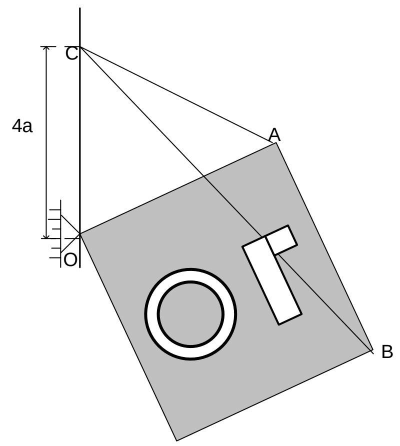
$Y_0 = -42{,}1N$

$X_0 = 182{,}25N$



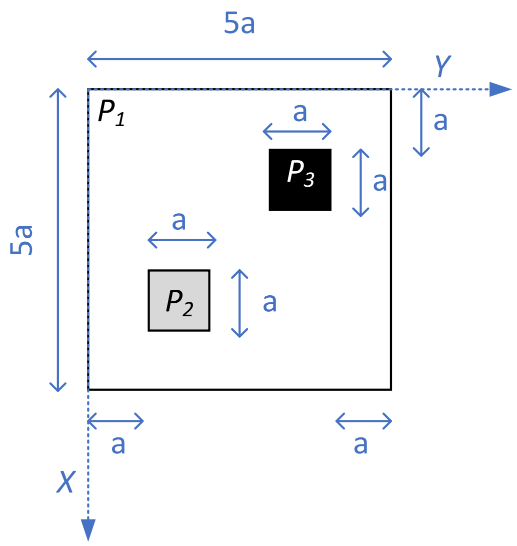
29. Tanka homogena ploča u obliku pravougaonika dimenzija 8*a* x 9*a* ima isečak u obliku oznake smera energetika (slovo O – prsten debljine *a*/2 sa centrom u (4*a*, 9/2*a*) i slovo Γ – pravougaonik *4a* x *a* i kvadrat *a* x *a*). Težina ploče je *Q*. Ploču u horizontalnom položaju održavaju konci AC i BC i sferni zglob O. Odrediti sile reakcije u zglobu O i sile zatezanja S_A i S_B. Sile izraziti u funkciji Q.

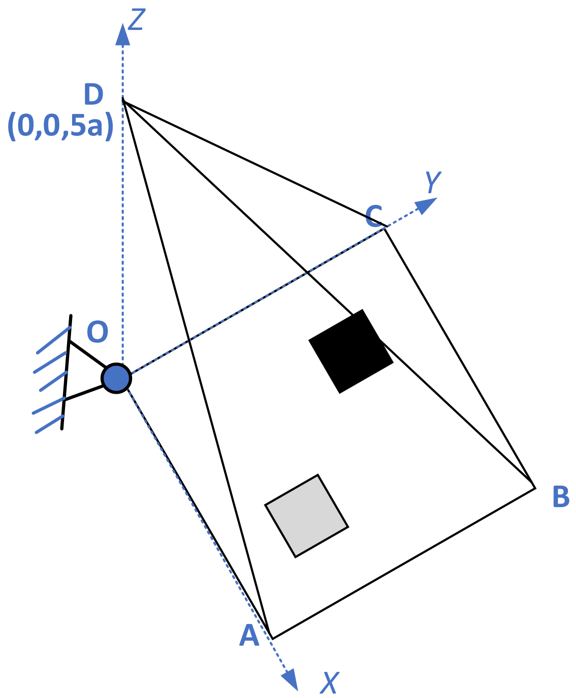




Rešenje:….

30. Kvadratna ploča dimenzija *5ax5a* i promenljive gustine $\rho_0 e^x$, ima dva dva kvadratna isečka dimenzija axa pozicionirani kao na Slici 1. Oba isečka su ispunjena različitim materijalima čije su gustine veće od ρ_0 i promenljiva su istom zavisnošću $\rho_2 e^x$ i $\rho_3 e^x$. Ploču u horizontalnom položaju u odnosu na zid održava sferni zglob O i tri konca prikačena u tačkama A, B i C kao na Slici 2. Zatezne sile u koncima su jednake i iznose 15 000 N. **Odrediti gustine dva različita materijala ρ_2 i ρ_3 (numeričke vrednosti)** ako su poznate sledeće vrednosti: a=1m, d=2cm (debljina ploče koja je kostantna), ρ_0=100 kg/m^3, g=10m/s^2.





Rešenje:

$$Q_1 = g \times 5a \times d \times \int_0^{5a} \rho_0\, e^x dx = 14740N$$

$$Q_2 = g \times a \times d \times \int_{3a}^{4a} (\rho_2 - \rho_0) e^x dx$$

$$Q_3 = g \times a \times d \times \int_{a}^{2a} (\rho_3 - \rho_0)\, e^x dx$$

$$x_{c1} = 4,034m = \frac{4e^5 + 1}{e^5 - 1} \quad y_{c1} = 2,5a$$

$$x_{c2} = 3,57m = \frac{3e^4 - 2e^3}{e^4 - e^3} \qquad y_{c2} = 1,5a$$

$$x_{c3} = 1,58m = \frac{e^2}{e^2 - e^1} \quad y_{c3} = 3,5a$$

$$-S_A \frac{\sqrt{2}}{2} + X_0 - S_B \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$-S_C \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_0 - S_B \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$S_A \frac{\sqrt{2}}{2} + S_C \frac{\sqrt{2}}{2} + Z_0 + S_B \frac{1}{\sqrt{3}} - Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$$

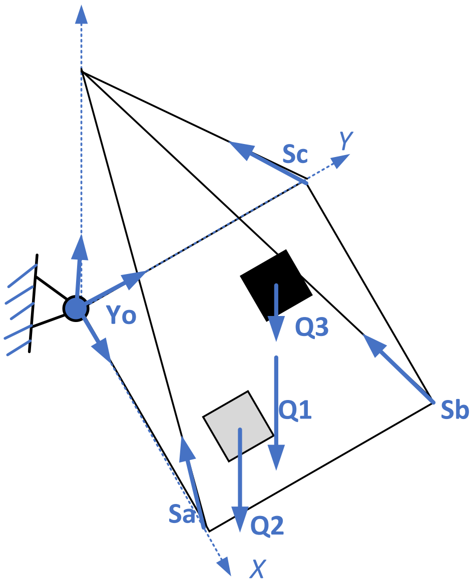
$$S_C \frac{\sqrt{2}}{2} 5a + S_B \frac{1}{\sqrt{3}} 5a - Q_1 y_{c1} - Q_2 y_{c2} - Q_3 y_{c3} = 0$$

$$-S_A\frac{\sqrt{2}}{2}5a - S_B\frac{1}{\sqrt{3}}5a + Q_1x_{c1} + Q_2x_{c2} + Q_3x_{c3} = 0$$

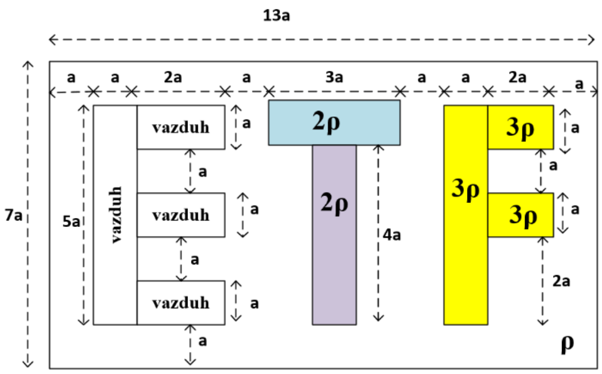
$Q_2 = 3528N\ Q_3 = 15325N$

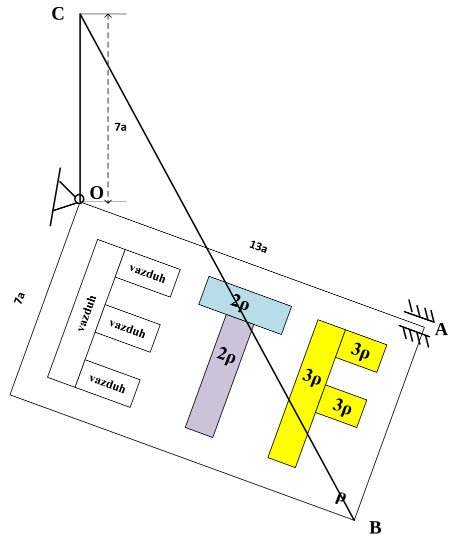
$\rho_2 = 610\frac{kg}{m^3},$

$\rho_3 = 16508\frac{kg}{m^3}$



Tanka homogena ploča, gustine $\rho_1=\rho$, u obliku pravougaonika dimenzija $7a$ x $13a$ ima isečak u obliku oznake Elektrotehničkog fakulteta **ETF** kao na Slici 1 (slovo **E** – prvouganik dimenzija $5a$ x a i tri manja prvougaonika dimenzija $2a$ x a, slovo **T** – pravougaonik $4a$ x a i pravouganik $3a$ x a i slovo **F** – prvouganik dimenzija $5a$ x a i dva manja prvougaonika dimenzija $2a$ x a). Isečak slova **T** je ispunjen materjialom gustine $\rho_2=2\rho$, a isečak slova **F** je ispunjen materjialom gustine $\rho_3=3\rho$. Težina predstavljene ploče na Slici 1 je Q. Ploču u horizontalnom položaju održavaju uže BC, cilindrični zglob u tački A i sferni zglob O kao na Slici 2. Odrediti sile reakcije u zglobovima O i A i silu zatezanja S_B. **Sile izraziti u funkciji Q.**





Slika 1

Slika 2

Debljina svih elemenata je kostantna pa se u proračunima ta dimenzija može zanemariti.

$$s_1 = s_7 = 5a^2, s_5 = 4a^2, s_6 = 3a^2$$
$$s_2 = s_3 = s_4 = s_8 = s_9 = 2a^2$$

$$s_{10} = 91a^2$$

Zbog različite gustine u izrazima za X_c i Y_c treba oduzimati S_1, S_2, S_3 i S_4. Površine S_5 i S_6 treba sabirati jer

ρ_2-ρ_1=ρ. Površine S_7 , S_8 i S_9 treba pomnožiti sa dva i sabirati jer ρ_3-ρ_1=2ρ.

$$x_{c10} = x_{c1} = x_{c3} = x_{c7} = x_{c9} = 3{,}5a; y_{c10} = 6{,}5a$$

$$x_{c2} = x_{c6} = x_{c8} = 1{,}5a$$
$$x_{c4} = 5{,}5a; x_{c5} = 4a$$
$$y_{c1} = 1{,}5a;\ y_{c2} = y_{c3} = y_{c4} = 3a$$
$$y_{c5} = y_{c6} = 6{,}5a$$

$$y_{c7} = 9{,}5a;\ y_{c8} = y_{c9} = 11a$$

Centri masa za slova pojedinačno:

$$x_{cE} = \frac{7a}{2}\ \ x_{cT} = \frac{41a}{14}\ x_{cF} = \frac{55a}{18}$$

$$y_{cE} = \frac{51a}{22} \quad y_{cT} = \frac{13a}{2} \quad y_{cF} = \frac{61a}{6}$$

$$x_c = \frac{s_{10}x_{c10} - s_1x_{c1} - s_2x_{c2} - s_3x_{c3} - s_4x_{c4} + s_5x_{c5} + s_6x_{c6} + 2(s_7x_{c7} + s_8x_{c8} + s_9x_{c9})}{s_{10} - s_1 - s_2 - s_3 - s_4 + s_5 + s_6 + 2(s_7 + s_8 + s_9)}$$

$$= \frac{361{,}5a}{105}$$

$$\boldsymbol{x_c = 3{,}39a}$$

$$y_c = \frac{s_{10}y_{c10} - s_1y_{c1} - s_2y_{c2} - s_3y_{c3} - s_4y_{c4} + s_5y_{c5} + s_6y_{c6} + 2(s_7y_{c7} + s_8y_{c8} + s_9y_{c9})}{105a^2}$$

$$= \frac{794{,}5a}{105}$$

$$\boldsymbol{y_c = 7{,}56a}$$

U zadatku su nepoznate tri sile sfernog zgloba, dve sile cilindričnog zgloba i jedna sila zatezanja koje je potrebno izraziti preko Q. Vrednost za $BC = \sqrt{49a^2 + 169a^2 + 49a^2} = 16{,}34a$

$$\sum X = 0 \rightarrow X_0 + X_A - S_B \frac{BO}{BC}\frac{7a}{BO} = 0$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow Y_0 - S_B \frac{BO}{BC}\frac{13a}{BO} = 0$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow Z_0 + Z_A + S_B \frac{7a}{BC} - Q = 0$$

$$\sum M_{OY} = 0 \rightarrow - S_B \frac{7a}{BC} 7a + Qx_C = 0$$

$$\sum M_{Ox} = 0 \rightarrow S_B \frac{7a}{BC} 13a + Z_A 13a - Qy_C = 0$$

$$\sum M_{OZ} = 0 \rightarrow X_A 13a = 0$$

Rešenje sistema, rezultati, su:

$$\boldsymbol{S_B = BC \frac{y_C}{49a^2} Q = 1{,}14Q}$$

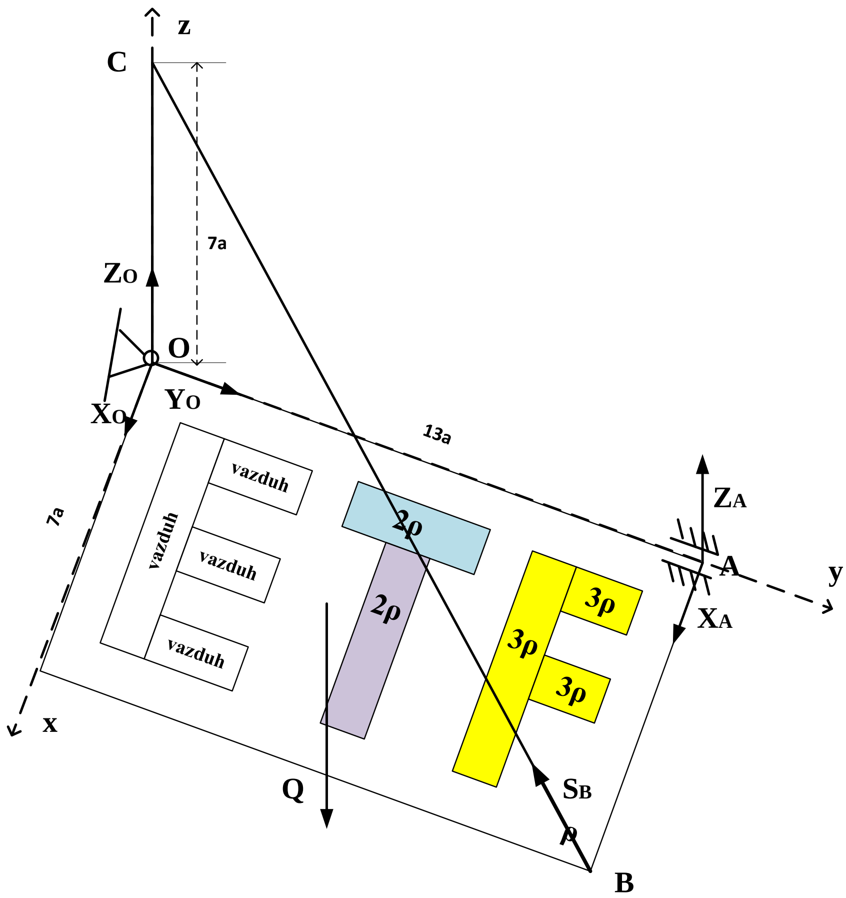
$$\boldsymbol{X_0 = 0{,}488Q}$$

$$\boldsymbol{X_A = 0}$$

$$\boldsymbol{Y_0 = 0{,}9Q}$$

$$\boldsymbol{Z_0 \approx 0{,}0{,}42Q}$$

$$\boldsymbol{Z_A \approx 0{,}1Q}$$


z
C
7a
ZO
O
XO
YO
13a
7a
vazduh
vazduh
vazduh
vazduh
2ρ
2ρ
3ρ
3ρ
3ρ
ZA
A
y
XA
x
Q
SB
ρ
B